МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ В МЕНЕДЖМЕНТЕ

Н. К. Кривулин, И. В. Гладких

ПОСТРОЕНИЕ СОГЛАСОВАННОЙ МАТРИЦЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ В МАРКЕТИНГОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ТРОПИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9

В статье* рассматривается задача оценки рейтингов альтернатив на основе их парных сравнений, которая возникает при анализе предпочтений потребителей в маркетинговых исследованиях. Обсуждаются вопросы формирования матрицы парных сравнений и изучается проблема согласованности таких матриц. Задача оценки формулируется как задача аппроксимации матрицы парных сравнений при помощи согласованной матрицы. Приводится краткий обзор необходимых понятий и результатов тропической математики, методы которой используются для унифицированного представления и полного решения задач аппроксимации в виде готовых расчетных формул. Применяется один общий подход к аппроксимации матриц парных сравнений с использованием мультипликативной и аддитивной шкал. Предложены новые решения задач аппроксимации для обратно симметрических и кососимметрических матриц, а также для произвольных мультипликативных и аддитивных матриц парных сравнений. Полученные решения распространяются на случай оценки рейтингов альтернатив на основе одновременной аппроксимации нескольких матриц. Для иллюстрации результатов представлен ряд численных примеров нахождения вектора рейтингов альтернатив в задаче выявления значимости ключевых характеристик предложения продавца при выборе контракта покупателем на конкурентном B2B-рынке.

Ключевые слова: маркетинговые исследования, анализ предпочтений потребителей, методы парных сравнений, тропическая математика, задачи аппроксимации, матрица парных сравнений, вектор рейтингов альтернатив.

---

* Публикация подготовлена в рамках поддержанного РГНФ научного проекта № 13-02-00338.

COMPUTATION OF THE CONSISTENT PAIRWISE COMPARISON MATRIX IN MARKETING RESEARCH BY USING METHODS OF TROPICAL MATHEMATICS

N. K. Krivulin, I. V. Gladkikh

St. Petersburg State University, 7/9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

In the paper, a problem of rating alternatives based on their pairwise comparisons is considered, which arises in the analysis of consumer preferences in marketing research. Questions of constructing pairwise comparison matrices are discussed, and the problem of the consistency of such matrices is examined. The rating problem is formulated as a problem of approximating the pairwise comparison matrix by a consistent matrix. A short overview is given of necessary notions and results of tropical mathematics, whose methods are then used for unified representation and complete solution of the approximation problems in the form of expressions, ready for direct numerical computation. A common approach is applied to approximating both multiplicative and additive pairwise comparison matrices. New solutions are proposed to the problems of approximation of symmetrically reciprocal and skew-symmetrical matrices, as well as of arbitrary multiplicative and additive pairwise comparison matrices. The solutions obtained are extended to the case of rating alternatives on the basis of simultaneous approximation of several matrices. To illustrate the results, numerical examples of calculating the vector of ratings of alternatives are presented for a problem in which a buyer analyzes the significance of key characteristics of the supply of sellers to select a seller in a competitive B2B market.

Keywords: marketing research, analysis of consumer preferences, methods of pairwise comparison, tropical mathematics, approximation problem, pairwise comparison matrix, vector of ratings of alternatives.

ВВЕДЕНИЕ

Метод парных сравнений лежит в основе одного из ключевых направлений выявления и измерения отношения респондентов к объекту оценки. Изучение отношений необходимо при решении широкого круга задач в социологии, маркетинге, психологии, принятии управленческих решений и других дисциплинах. В качестве респондентов могут выступать профессиональные эксперты, потенциальные покупатели, представители социальных групп и другие люди, которые пытаются определить, насколько более важной, значимой, целесообразной одна из альтернатив является относительно другой альтернативы. Обработка результатов подобных опросов связана с решением проблемы несогласованности полученных ответов, в частности, нарушения транзитивности оценок.

Например, если респондент утверждает, что для него товар T_1 более предпочтителен, чем товар T_2, а товар T_2 предпочтительнее, чем товар T_3, то естественно считать, что товар T_1 должен быть для него предпочтительнее T_3. Однако в силу субъективного характера процесса оценки и других причин такой вывод часто противоречит прямой оценке респондентом товаров T_1 и T_3, которая может оказаться в пользу товара T_3, а не T_1. Несогласованность результатов парных сравнений, которая может также являться следствием ошибок при проведении и регистрации измерений, снижает обоснованность применения и затрудняет практическое использование этих результатов для выявления предпочтений в маркетинговых и других исследованиях. Указанные проблемы делают актуальной задачу замены несогласованной матрицы парных сравнений на близкую к ней матрицу, в которой результаты сравнений будут согласованы друг с другом.

В математической постановке задача сводится к аппроксимации матрицы парных сравнений согласованной матрицей. Учитывая, что форма согласованной матрицы для мультипликативной и аддитивной шкалы сравнений известна, используемые методы аппроксимации отличаются в основном выбором и способом минимизации подходящей функции невязки для измерения ошибки аппроксимации. Важной особенностью решения задачи является возможность одновременно с нахождением аппроксимирующей матрицы сразу получить вектор относительных рейтингов альтернатив, соответствующий такой матрице, который обычно является конечной целью исследования.

Известные методы аппроксимации и построения вектора рейтингов альтернатив приводят к необходимости решения довольно сложных вычислительных задач. Такие задачи в общем случае не имеют прямого решения и требуют применения специальных итерационных вычислительных алгоритмов для их приближенного решения, которые могут приводить к существенным вычислительным затратам, особенно с ростом количества исходных данных. Например, решение с использованием евклидовой метрики для оценки ошибки аппроксимации обычно находится при помощи итераций по методу Ньютона, а решение на основе чебышевской метрики получают, применяя подходящую вычислительную схему линейного программирования.

Еще один эффективный подход к решению рассматриваемых задач опирается на применение моделей и методов тропической математики, которая представляет собой новое направление прикладной математики, связанное с изучением алгебраических систем со специальным образом определенными операциями сложения и умножения.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы представить методологические основы и математические методы решения задач анализа предпочтений на основе тропической математики. Как будет показано далее, в отличие от традиционных подходов методы тропической математики позволяют получить прямое решение задачи аппроксимации матрицы парных сравнений и нахождения вектора относительных рейтингов альтернатив в компактной векторной форме в виде простых и готовых к непосредственному применению расчетных формул. Такая форма решения обеспечивает гораздо меньше вычислительных затрат по сравнению с трудоемкими приближенными алгоритмическими решениями.

Результатом применения тропической математики является общая универсальная форма представления задачи и ее решения, которая не зависит от вида шкалы (мультипликативной или аддитивной), используемой для сравнений.

Наконец, решения, полученные с помощью методов тропической математики, оказываются устойчивыми по отношению к малым изменениям исходных данных, что является дополнительным аргументом в пользу их достоверности и обоснованности. Эту особенность решений иллюстрируют имеющиеся в работе численные примеры, в которых для ряда задач с близкими по значениям результатами парных сравнений найденные векторы относительных рейтингов альтернатив оказываются одинаковыми.

В настоящей работе, которая продолжает исследования, начатые авторами в статье [Кривулин, Гладких, 2013], задача анализа предпочтений сначала рассматривается в контексте практической проблемы выявления значимости ключевых характеристик предложения продавца при выборе контракта покупателем на конкурентном B2B-рынке. Затем обсуждается применение в таких задачах техники парных сравнений. Исследуются вопросы формирования матрицы парных сравнений и изучается проблема согласованности матриц. Задача оценки степени предпочтений альтернатив формулируется как задача аппроксимации произвольной матрицы парных сравнений согласованной матрицей.

Для того чтобы продемонстрировать новые решения задачи оценки предпочтений, сначала вводятся основные понятия, обозначения и результаты тропической математики. Затем аппарат и методы тропической математики используются для унифицированного представления и полного решения в виде готовых расчетных формул задач аппроксимации матриц парных сравнений согласованными матрицами. Применяется один и тот же общий подход к задачам аппроксимации матриц парных сравнений с использованием мультипликативной и аддитивной шкал. Предложены новые решения задач аппроксимации для обратно симметрических и кососимметрических матриц, а также для произвольных мультипликативных и аддитивных матриц парных сравнений. Представлены решения задач нахождения общей согласованной матрицы в задачах с несколькими матрицами парных сравнений.

МЕТОДЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ В МАРКЕТИНГЕ

Изучение предпочтений потребителей составляет одно из ключевых направлений маркетинговых исследований. Решаемая на этапе качественных исследований задача идентификации потребностей в своем развитии неизбежно приводит к необходимости более детального понимания того, как потребитель осуществляет свой выбор при наличии множества альтернатив.

Проблема измерения субъективного отношения к объекту оценки. Каждый потребитель, так или иначе, принимает решения, которые очень похожи на управленческие решения менеджера. При ограниченных ресурсах из множества альтернатив (не обязательно однородных) надо выбрать одну. В основе выбора лежит формирование предпочтений, которые, в свою очередь, основаны на процедуре сравнения и оценки: сравнивается желаемое с действительным, каждая альтернатива соотносится с другими, идентифицируются и оцениваются различия. Субъективно воспринимаемым итогом этой мыслительной работы является ранжирование альтернатив по степени привлекательности.

Несмотря на то что каждая альтернатива выступает как системная качественная целостность, например конкретный продукт или вариант использования дохода, ее оценка формируется на основе оценки отдельных элементов этой целостности (потребительские характеристики, бренд и т. п.). Каждый из таких элементов, т. е. атрибут (attribute), рассматриваемый лицом, принимающим решение, сам по себе выступает как критерий принятия решений, если он действительно является значимым. Последнее также предполагает процедуру сравнения и формирования предпочтений.

Изучение предпочтений предусматривает их измерение, т. е. отображение эмпирической системы в числовую, сохраняющую порядок отношений между объектами.

В маркетинге подобный подход связан, в частности, с исследованиями в области многокритериальных моделей отношения, начало которых приходится на конец 60-х — начало 70-х гг. XX в. Многокритериальные, или мультиатрибутивные, модели отношения (multiattribute attitude models) построены на общем принципе комбинирования отношения потребителя к отдельным характеристикам товара (attribute) при формировании целостного отношения к нему.

Методологические основы таких подходов опираются на исследования в области психологии, психометрики и социологии.

Термин «аттитюд» (attitude), пришедший из социальной психологии, поразному переводят на русский язык: установка, позиция, отношение и даже предпочтение. Все это верно с точки зрения заимствованных маркетингом смыслов. Речь идет о субъективном отношении человека к объекту, основанном на осознании и оценке, его ценностном отношении, вызывающем определенную эмоциональную и поведенческую реакцию.

Это отношение может быть измерено. Конечная цель заключается в том, чтобы соотнести закрепленное в сознании положение каждого оцениваемого покупателем объекта с некой шкалой, которая в идеале не только отображает ситуацию ранжирования (упорядочения объектов по возрастанию или убыванию какого-то их свойства или системной целостности свойств), но и позволяет отобразить расстояния между объектами (выявить рейтинги). Подобное расстояние можно интерпретировать как степень предпочтения или значимость (если рассматривается отдельный элемент системной целостности). При этом ключевое значение имеет не когнитивный компонент аттитюда (понимание и осознание объекта оценки) и не его аффективный компонент (эмоциональная оценка объекта). Важно, каким образом это отразится на поведении по отношению к объекту, т. е. рассматривается его поведенческий (конативный) компонент.

Измерение предпочтений продуктов в целом (например, сравнение нескольких конкретных моделей автомобилей) и измерение значимости отдельных элементов продукта для покупателя (например, мощность, экономичность, бренд) имеют общую психологическую основу. Мы говорим об измерении того, что само по себе субъективно и никак изначально не связано в представлении респондента с какой-либо шкалой. Кроме того, восприятие респондента изменчиво, непостоянно, не все различия он может почувствовать, его знания обновляются, а разные респонденты (эксперты) могут пребывать в разной парадигме оснований для соотнесения объектов.

Решению указанных проблем посвящена заметная часть истории психологии, социологии и маркетинговых исследований. Измерение субъективных расстояний и шкалирование субъективных характеристик стимулов, не имеющих прямых физических коррелятов, занимали многих исследователей, включая Г. Фехнера (G. Fechner), Дж. Фуллертона (G. Fullerton), Дж. Кэтелла (J. M. Cattell), Э. Торндайка (E. L. Thorndike), Л. Терстоуна (L. L. Thurstone). Считается, что работы Л. Терстоуна [Thurstone, 1928; 1931; Thurstone, Chave, 1929] сыграли наиболее заметную роль в становлении современных технологий измерения предпочтений. Шкалирование по Терстоуну (Thurstoune scaling) и метод субъективно равных интервалов (equal-appearing intervals) лежат в основе конструирования многих инструментов количественного измерения аттитюдов. В работах Терстоуна использовалась 11-балльная шкала с нейтральной оценкой на уровне шестого балла. Дальнейшие модификации этого подхода например, шкала Лайкерта или шкала оценки важности, используемая в методе анализа иерархий Саати, выстроены вокруг одной базовой идеи, которая используется и в маркетинговых исследованиях.

Парные сравнения как метод измерения аттитюдов. В современных маркетинговых исследованиях применяются различные методы измерения значимости характеристик или предпочтений потребителей. Часть этих методов построена на технологиях прямых опросов, когда респондент осуществляет непосредственную оценку значимости (предпочтений) определенных характеристик (объектов). Если таких характеристик больше двух, то возникает выбор, как проводить опрос: просить респондентов разместить сразу все объекты относительно друг друга или использовать алгоритм парных сравнений.

И тот и другой подход находят свое применение [Гладких, Светланова, 2006]. К методам, построенным на одновременном соизмерении всех рассматриваемых объектов, относятся метод ранжирования характеристик товаров (attribute ranking), метод рейтинговой оценки (attribute rating), например, по шкале Лайкерта, метод отношения (ratio method), сочетающий в себе элементы ранжирования и присвоения весов, метод последовательных предпочтений (метод Отто), метод распределения суммы (constant sum, sum allocation), метод Q-сортировки (Q-sort), предполагающий распределение на группы характеристик, и др.

Метод парных сравнений (pairwise comparison, paired comparison) как один из подходов к изучению предпочтений построен на том, что респондент в каждом акте сопоставления рассматривает только две характеристики (объекта). Из всех возможных парных сочетаний объектов выбирается самый предпочтительный в соответствии с заданным критерием. Такое сравнение может осуществляться как на уровне принципиального выбора (A предпочтительнее, чем B), так и на основе шкал измерения аттитюдов (A однозначно предпочтительнее, скорее предпочтительнее и т. п.). Добавление шкалы позволяет приблизиться к более точному измерению. Результатом является матрица парных сравнений, анализируя которую можно сделать вывод об оценке предпочтительности респондентом всех объектов.

Именно методы парных сравнений используются в методе анализа иерархий [Саати, 1993], широко распространенном сегодня, несмотря на периодически появляющуюся его критику [Ногин, 2004; Подиновский, Подиновская, 2011]. Метод анализа иерархий также построен на прямом опросе респондентов, в качестве которых выступают эксперты, стремящиеся проявить предельно рациональный подход. Эксперты до конца понимают смысл вопроса, осознают, для чего проводится опрос, и осуществляют последовательное парное сравнение характеристик.

В маркетинговых исследованиях гораздо меньше доверяют методам прямых опросов. Дело не только в неготовности респондента делиться своими представлениями, но и зачастую в его неспособности точно отобразить свои предпочтения на уровне рассмотрения элементов целого (сказать, что важнее и на сколько). Однако потенциал метода парных сравнений используется и при проведении косвенных опросов на основе методов аналитического выявления предпочтений без использования прямых вопросов о значимости. Так, при проведении совместного анализа (conjoint analysis) полная версия опроса предполагает парное сравнение двух профилей объектов, которые отличаются друг от друга по уровню некоторых атрибутов, включенных в профиль. Фактически речь идет о парном сравнении двух системных целостностей с измененными уровнями атрибутов.

Таким образом, применение матриц парных сравнений имеет широкий потенциал использования. Они применяются не только в рамках метода анализа иерархий (при принятии управленческих решений и определении групповых предпочтений экспертов), но и в маркетинговых исследованиях, при определении весовых коэффициентов критериев в системном анализе, при измерении качества и пр. Метод парных сравнений позволяет определить воспринимаемое положение объектов в иерархии самых разных систем.

При заполнении матриц парных сравнений приходится решать свой круг задач, которые направлены на преодоление трудностей, связанных с несогласованностью введенных предпочтений, нарушением транзитивности оценок, наличием частично заданных матриц. Такого рода несоответствия затрудняют или делают не вполне обоснованным применение количественных методов для решения задачи измерения предпочтений.

Нарушение согласованности и транзитивности — неизбежный спутник измерения аттитюдов. Существуют проблемы, которые возникают как результат использования респондентами разных оснований при сравнении. Их можно решать на этапе организации исследования, но все равно останется психологическая проблема. Еще Терстоун [Thurstone, 1928] показал, что величина «внутреннего эффекта», вызванного стимулом, может изменяться при его повторных представлениях случайным образом.

В практических задачах замена несогласованной матрицы парных сравнений на близкую к ней согласованную осуществляется разными методами, включая методы тропической математики, которым посвящена настоящая работа.

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Для математической обработки результатов первичного опроса респондентов формируется матрица парных сравнений. При изучении матрицы парных сравнений и оценке степени предпочтения альтернатив используется целый ряд подходов от простейших вычислительных приемов до сложных вероятностных моделей и методов (см., напр.: [Дэвид, 1978; Саати, 1993]).

Покажем, каким образом задача анализа парных сравнений может появляться и решаться в контексте практических исследований в маркетинге. Предположим, что маркетологами выполняется задача выявления значимости ключевых характеристик предложения продавца при выборе контракта покупателем на конкурентном B2B-рынке при закупке одного из видов сырья для пищевой промышленности.

С этой целью сначала была проведена серия глубинных интервью с менеджерами, отвечающими за закупки. Эти интервью показали, что в процессе реального выбора поставщика менеджеры по закупкам рассматривают четыре ключевых критерия:

A — регион производства;

B — цена;

C — качество логистики, включая скорость и надежность поставки;

D — возможность фиксирования цены на длительный период.

Задача, которую следует решить далее, заключается в выявлении значимости для покупателя каждого из названных критериев выбора.

Как уже отмечалось, эту задачу можно решить разными методами. Использование метода парных сравнений предполагает, что опрос покупателя (выступающего на B2B-рынке в лице эксперта) строится по модели выбора наиболее предпочтительного варианта из двух предложенных. Каждый из атрибутов (критериев выбора) сравнивается поочередно с другими атрибутами. Респондент отвечает на вопрос о том, что при прочих равных условиях для него предпочтительнее: выгодная цена или имеющий лучшую репутацию регион производства, возможность фиксирования цены на длительный период или качество логистики и т.д. для всех вариантов сочетаний атрибутов. При этом предполагается, что мы не выходим за область допустимых значений по каждому из атрибутов (увеличение цены не чрезмерное, регионы с плохой репутацией не рассматриваются и т.п.). Если условия проведения опроса позволяют, то в рамках каждой пары сравнений вопрос можно задавать дважды, меняя пары местами. Последнее означает, что роль константного стимула в процессе поиска различий тоже меняется. При опросе экспертов такое возможно, но при массовых исследованиях это не всегда получается.

Матрицы принципиального выбора. В базовой версии опроса не предполагается обязательного получения прямой информации о степени предпочтительности того или иного варианта, т.е. об измерении отношения. В этом случае матрица парных сравнений будет заполнена только единицами (большая значимость элемента) и нулями (меньшая значимость элемента). Например, если предположить, что порядок записи атрибутов предложения в нашем примере отражает степень их важности, то матрица должна иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 0 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

Единицы отражают предпочтения критерия, связанного со строкой (от 1 до 4 сверху вниз), относительно критерия, связанного со столбцом (от 1 до 4 слева направо).

Суммирование единиц строки означает подсчет числа предпочтений критерия над другими критериями. Элементы полученного вектора показывают общее количество предпочтений соответствующего критерия по отношению к другим и могут быть взяты в качестве основы для ранжирования. Вектор этих сумм (3, 2, 1, 0) показывает распределение приоритетов покупателя и может быть преобразован в ранговую шкалу. При желании можно разделить все элементы на их сумму (нормировать), чтобы получить вектор (1/2, 1/3, 1/6, 0). В этом результате нуль выглядит естественно в силу того, что элементы вектора теперь показывают не что иное, как долю предпочтений каждого критерия от суммы всех предпочтений (единиц в матрице).

Главный недостаток такой арифметики состоит в том, что здесь вычисляются некоторые абсолютные показатели, которые не вполне учитывают взаимное влияние предпочтений. Хотя сама матрица и отражает в некотором смысле парные сравнения альтернатив, способ вычисления, по существу, может привести к потере информации.

Строго говоря, матрица с неопределенными элементами, на месте которых стоят «тире», не позволяет работать с ней как с полноценным математическим объектом. Это своего рода таблица исходной информации.

Более правильно (с математической точки зрения) сформировать матрицу так, чтобы на диагонали стояли числа, например 1/2. Число 1/2 можно рассматривать как промежуточное значение между 0 «не предпочитаю» и 1 «предпочитаю», которое как раз и отражает неопределенность сравнения альтернативы с самой собой. В этом случае суммирование по строкам даст вектор (7/2, 5/2, 3/2, 1/2) или после нормирования — вектор (0,4375, 0,3125, 0,1875, 0,0625), который не будет иметь нулевых координат.

Матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

интерпретировать в терминах мультипликативной шкалы нельзя в силу того, что для нуля нет обратного числа по умножению. Но ее вполне можно рассматривать как матрицу парных сравнений с аддитивной шкалой: 0 — «не предпочитаю», 1 — «предпочитаю», 1/2 — «ни то, ни другое».

Основной задачей, решаемой в маркетинге и социологии, является не просто ранжирование приоритетов, а приписывание атрибутам таких чисел, которые можно прямо связывать со степенью значимости. Например, в ценовых исследованиях спроса решение большинства задач построено на понимании процента (или доли) относительной значимости фактора для покупателя.

Нормированый вектор (0,4375, 0,3125, 0,1875, 0,0625) можно попытаться интерпретировать как выражение не только рангов (последовательности предпочтений), но и степени значимости атрибутов. Но о точности таких результатов нужно говорить с осторожностью, так как шкала отношений при опросе не использовалась.

Метод балльных оценок. Для приближения к более точному решению задачи определения рейтинга факторов в виде количественной индивидуальной оценки можно попытаться использовать при опросе более сильные балльные шкалы отношений (с некоторой фиксированной точкой отсчета), позволяющие соотносить друг с другом степени предпочтения. На шкале отношений определены любые арифметические операции, что позволяет вносить в показания, нанесенные на шкалу, мультипликативные и аддитивные поправки.

Таких шкал может быть много. Например, в работах Терстоуна использовалась 11-балльная шкала с нейтральной оценкой на уровне шестого балла, значениями от +1 до +5 (в диапазоне от 6 до 11) и от −1 до −5 (в диапазоне от 5 до 1). В методе анализа иерархий Саати при опросе экспертов выделяются уровни оценки 1, 3, 5, 7 и 9 с возможностью использования промежуточных значений.

В маркетинговых исследованиях применение очень сложных шкал себя не оправдывает. Вариант построения шкалы относительной важности может быть предложен, например, в таком виде:

1 — степень значимости одинакова;

2 — альтернатива скорее более значима, чем одинакова;

3 — альтернатива более значима (сильное предпочтение);

4 — альтернатива заметно более значима (очень сильное предпочтение);

5 — альтернатива имеет абсолютный приоритет.

С помощью такой шкалы каждый респондент, сравнивая попарно все возможные альтернативы, может ответить на вопрос, какая из характеристик окажется для него (при прочих равных условиях) более предпочтительной и в какой степени.

Мультипликативные и аддитивные матрицы. Матрица парных сравнений составляется по результатам ответов респондентов. Результат сравнения альтернативы i с альтернативой j обозначим через a_{ij}.

При использовании мультипликативной шкалы результат сравнения показывает, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее (значительнее) другой. Например, если альтернатива i считается в два раза более предпочтительной, чем альтернатива j, то $a_{ij} = 2$ и $a_{ji} = ½$. Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$, составленная из результатов сравнения альтернатив для всех i, j, называется мультипликативной матрицей парных сравнений. Учитывая, что элементы матрицы, симметричные относительно диагонали, связаны соотношением

$$a_{ij} = 1/a_{ji},$$

матрица имеет обратно симметричную форму.

Пример 1. Рассмотрим сформулированную выше задачу выявления значимости характеристик предложения продавца на B2B-рынке по четырем критериям: A, B, C и D на основе 5-балльной шкалы предпочтений. Пусть результаты опроса получены в соответствии с мультипликативной шкалой, например, в виде табл. 1.

Таблица 1

Результаты парных сравнений с мультипликативной шкалой

	A	*B*	*C*	*D*
A	1	2	2	4
B	1/2	1	1	2
C	1/2	1	1	2
D	1/4	1/2	1/2	1

Эту таблицу можно записать в виде мультипликативной матрицы парных сравнений:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты опроса можно также представить в виде аддитивной матрицы. В этом случае следует исходить из того, что за основу берется разность в степени значимости, заданная исходной шкалой:

0 — степень значимости одинакова: разность в степени важности 0;

1 — альтернатива скорее более значима, чем одинакова: разность в степени важности 1;

2 — альтернатива более значима: разность в степени важности 2;

3 — альтернатива заметно более значима: разность в степени важности 3;

4 — альтернатива имеет абсолютный приоритет: разность в степени важности 4.

В случае аддитивной шкалы результат сравнения показывает, на сколько одна альтернатива лучше другой в некоторых заданных единицах измерения. Например, если альтернатива i лучше j на две единицы, то можно положить $a_{ij} = 2$ и $a_{ji} = -2$. Элементы аддитивной матрицы парных сравнений $\mathbf{A} = (a_{ij})$ удовлетворяют условию

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

для всех i и j, и поэтому такая матрица является кососимметрической.

Отталкиваясь от исходных данных, табл. 1 можно придать аддитивную форму (табл. 2).

Таблица 2

Результаты парных сравнений с аддитивной шкалой

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	1	1	3
B	–1	0	0	1
C	–1	0	0	1
D	–3	–1	–1	0

Соответствующая аддитивная матрица парных сравнений имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проблема несогласованности матриц парных сравнений. Одна из ключевых проблем, которая возникает в ходе практической реализации метода парных сравнений, связана с нарушением согласованности матриц.

Мультипликативная матрица парных сравнений $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется согласованной, если ее элементы удовлетворяют следующим условиям [Саати, 1993]:

1) $a_{ij} = 1/a_{ji}$ для всех i, j (обратная симметричность);
2) $a_{ik} = a_{ij}\, a_{jk}$ для всех i, j, k (транзитивность).

Для того чтобы аддитивная матрица парных сравнений $\mathbf{A}$ была согласованной, ее элементы должны обладать такими свойствами, как:

- $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i, j (кососимметричность);
- $a_{ik} = a_{ij} + a_{jk}$ для всех i, j, k (транзитивность).

Несогласованность проявляется в нарушении логики взаимозависимостей между данными, которая может быть обусловлена разными причинами.

Во-первых, если вопросы относительно двух альтернатив повторялись, то возможно нарушение обратной симметричности (кососимметричности) заполненной матрицы. Например, респондент считает, что альтернатива i лучше, чем альтернатива j в два раза, а i хуже, чем j, например, в три раза. Кроме того, при практических исследованиях мультипликативная (аддитивная) матрица парных сравнений может иметь форму, которая отличается от обратно симметрической (кососимметрической), например, из-за ошибок при обработке результатов сравнений.

Во-вторых, может возникать проблема нарушения транзитивности (логического соответствия) суждений. Например, если респондент говорит, что для него альтернатива i более предпочтительна, чем альтернатива j, а альтернатива j лучше, чем альтернатива k, то i должна быть для него предпочтительнее k. Однако в силу субъективного характера процесса оценки и других причин такой вывод часто может противоречить прямому сравнению первого и третьего атрибутов и окажется, что k лучше, чем i.

Пример 2. Рассмотрим мультипликативную матрицу, полученную на основе парных сравнений четырех альтернатив:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы показывают, что первая альтернатива предпочтительнее второй в $a_{12} = 2$ раза, а вторая предпочтительнее третьей тоже в $a_{23} = 2$ раза. Тогда естественно ожидать, что первая альтернатива будет предпочтительнее, чем третья, в $a_{12}\, a_{23} = 4$ раза. Однако записанный в матрице результат прямого сравнения последних двух альтернатив $a_{31} = 2$ показывает, что третья альтернатива оценивается, наоборот, как в два раза более предпочтительная, чем первая.

Нарушение согласованности исходной матрицы парных сравнений обычно не позволяет считать результаты анализа матрицы парных сравнений вполне обоснованными и корректными.

В практике исследований накоплен большой опыт преодоления проблемы несогласованности. Один из возможных подходов состоит в нахождении приближенных решений задачи на основе простых процедур нормализации матрицы парных сравнений. Применение таких процедур не требует выполнения условий согласованности матрицы, но при этом позволяет получить только грубые оценки решения [Саати, 1993].

Основным подходом, который используется при решении проблемы, является замена несогласованной матрицы близкой к ней согласованной. Например, метод собственного вектора Саати можно рассматривать как приближение с помощью согласованной матрицы, которая построена на основе собственного вектора исходной матрицы [Саати, 1993]. Другой метод, известный как метод наименьших квадратов [Saaty, Vargas, 1984], строит согласованную матрицу на основе приближения в смысле обычной евклидовой нормы.

К рассматриваемым методам также относятся новые методы решения задач анализа предпочтений на основе тропической математики [Elsner, van der Driessche, 2004; 2010], которые могут трактоваться как приближение согласованными матрицами в чебышевской норме.

Решение задачи оценки степени предпочтений. Решение задачи оценки степени предпочтений по результатам парных сравнений непосредственно связано и, по сути, состоит в приближении (аппроксимации) исходной матрицы парных сравнений **A** согласованной матрицей **X**.

Если принята мультипликативная шкала сравнений, то любая согласованная матрица $\mathbf{X} = (x_{ij})$ имеет элементы, которые определяются соотношением [Саати, 1993; Saaty, Vargas, 1984]:

$$x_{ij} = x_i/x_j,$$

где x_i — положительные числа при всех i.

При аддитивном парном сравнении элементы матрицы **X** задаются соотношением

$$x_{ij} = x_i - x_j,$$

где x_i — произвольное число для каждого i.

Из приведенных соотношений ясно, что для вычисления элементов x_{ij} согласованной матрицы достаточно знать числа x_i, которые можно рассматривать как компоненты вектора $\mathbf{x} = (x_i)$. Другими словами, любая согласованная матрица **X** однозначно определяется посредством некоторого соответствующим образом подобранного вектора **x**.

В то же время нахождение вектора **x** является центральной задачей при анализе результатов парных сравнений. В рамках задачи сравнения альтернатив значение элемента x_i вектора **x** определяет относительный индивидуальный рейтинг (степень предпочтения, вес, приоритет) альтернативы i и может служить основой для принятия решений.

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЦ

Учитывая, что форма согласованной матрицы для мультипликативной и аддитивной шкал сравнений известна, используемые методы аппроксимации отличаются в основном выбором и способом минимизации подобранной функции невязки, которая описывает степень несовпадения двух объектов (измеряет ошибку аппроксимации).

Метод собственного вектора [Саати, 1993; Saaty, Vargas, 1984], по сути, заключается в замене исходной мультипликативной матрицы парных сравнений на ее приближение матрицей единичного ранга, построенной при помощи собственного вектора матрицы, который соответствует ее максимальному собственному числу. Задача отыскания собственного вектора в общем случае не имеет прямого решения в явном виде (т. е. в виде расчетных формул для вычисления координат вектора путем выполнения фиксированного числа арифметических операций). Эта задача обычно решается при помощи известных итеративных вычислительных процедур (алгоритмов), например с использованием степенного метода, требующих определенных вычислительных затрат.

При аппроксимации в евклидовой метрике по методу наименьших квадратов [Saaty, Vargas, 1984] возникает нелинейная задача оптимизации, которая решается алгоритмически при помощи, например, итераций по методу Ньютона [Chu, 1998; Farkas, Lancaster, Rózsa, 2003].

Задача аппроксимации в метрике Чебышева может быть сформулирована как задача линейного программирования [Gonzalez-Pachon, Rodriguez-Galiano, Romero, 2003; Dahl, 2005] и тоже решена с использованием подходящего алгоритма, например симплекс-метода.

Далее будет показано, что, в отличие от трудоемких алгоритмических решений на основе других методов, применение тропической математики позволяет получить прямое решение задачи чебышевской аппроксимации в форме готовых к использованию расчетных формул.

В общем виде проблема аппроксимации может быть представлена как задача нахождения для заданной матрицы $\mathbf{A}$ согласованной матрицы $\mathbf{X}$ или, что равносильно, вектора $\mathbf{x}$, при которых достигается минимум

$$\min_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{X}),$$

где φ — некоторый критерий, отражающий степень различия между матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{X}$ (ошибку аппроксимации).

Заметим, что при такой постановке задачи одновременно с нахождением согласованной матрицы $\mathbf{X}$ определяется вектор $\mathbf{x}$ относительных рейтингов альтернатив, который является решением общей задачи сравнения всех имеющихся альтернатив.

Мультипликативные матрицы сравнений. Парные сравнения с использованием мультипликативной шкалы являются инструментом, который чаще всего применяется при принятии решений на основе метода анализа иерархий, а также в маркетинговых исследованиях.

Предположим, что имеется обратно симметрическая мультипликативная матрица парных сравнений $\mathbf{A} = (a_{ij})$ с положительными элементами, которые удовлетворяют соотношению $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Рассмотрим задачу аппроксимации матрицы $\mathbf{A}$ с помощью мультипликативной согласованной матрицы $\mathbf{X} = (x_{ij})$ с положительными элементами $x_{ij} = x_i/x_j$.

Начнем с анализа результатов, представленных в работах [Elsner, van den Driessche, 2004; 2010]. Критерий максимальной относительной ошибки, который введен в [Elsner, van der Driessche, 2004], вычисляется по формуле

$$\varphi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i,j}\left|\frac{a_{ij} - x_i/x_j}{a_{ij}}\right|.$$

В указанных работах задача минимизации φ_1 сводится к задаче минимизации функции

$$\varphi_1'(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i,j}\frac{a_{ij}\, x_j}{x_i}.$$

Отметим, что последняя задача рассматривается также в работе [Dahl, 2005], где она решается путем перехода к аддитивной задаче с помощью применения логарифма.

Следующий результат дает простое прямое доказательство соотношения, которое связывает критерии φ_1 и φ_1'.

Предложение 1. Справедливо равенство

$$\varphi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \varphi_1'(\mathbf{A}, \mathbf{X}) - 1.$$

Доказательство. Выполняя очевидные алгебраические преобразования, получим

$$\varphi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i,j}\left|1 - \frac{x_i}{a_{ij}x_j}\right| = \max_{i>j}\max\left\{\left|\frac{x_i}{a_{ij}x_j} - 1\right|, \left|\frac{x_j}{a_{ji}x_i} - 1\right|\right\} =$$

$$= \max_{i>j}\max\left\{\left|\frac{x_i}{a_{ij}x_j} - 1\right|, \left|\frac{a_{ij}x_j}{x_i} - 1\right|\right\}.$$

Заметим, что выражения $x_i/(a_{ij}x_j)$ и $a_{ij}x_j/x_i$ являются взаимно обратными и только одно из них может быть больше 1, а другое — меньше 1. Следовательно,

$$\varphi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i>j}\max\left\{\frac{x_i}{a_{ij}x_j} - 1, \frac{a_{ij}x_j}{x_i} - 1\right\} = \max_{i>j}\max\left\{\frac{x_i}{a_{ij}x_j}, \frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right\} - 1 =$$

$$= \max_{i>j}\max\left\{\frac{x_i}{a_{ij}x_j}, \frac{x_j}{a_{ji}x_i}\right\} - 1 = \max_{i,j}\frac{a_{ij}x_j}{x_i} - 1 = \varphi_1'(\mathbf{A}, \mathbf{X}) - 1.$$

В силу того что функция φ_1' отличается от функции φ_1 только аддитивной константой, которая не влияет на изменение значений функции φ_1, задачу минимизации относительной ошибки теперь можно свести к нахождению минимума

$$\min_{\mathbf{X}} \varphi_1'(\mathbf{A}, \mathbf{X}) \tag{1}$$

по всем обратно симметрическим матрицам $\mathbf{X}$.

Аддитивные матрицы сравнений. Парное сравнение с применением аддитивной шкалы представляет собой еще один способ описания предпочтений [Barzilai, 1997; Ji, Jiang, 2003; Guh, Po, Lou, 2009].

В случае аддитивной шкалы обратно симметрическая матрица парных сравнений принимает форму кососимметрической матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ с элементами $a_{ij} = -a_{ji}$.

Рассмотрим задачу аппроксимации матрицы $\mathbf{A}$ согласованной аддитивной матрицей $\mathbf{X} = (x_{ij})$ с элементами $x_{ij} = x_i - x_j$. Как и раньше, вместе с матрицей $\mathbf{X}$ будем рассматривать вектор $\mathbf{x} = (x_i)$.

Определим максимальную абсолютную ошибку аппроксимации выражением

$$\psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i,j} \left| a_{ij} - \left(x_i - x_j\right) \right|.$$

Такой критерий вводится, например, в работе [Dahl, 2005] как результат перехода от мультипликативной постановки задачи к аддитивной.

Заметим, что в силу известных трудностей, связанных с анализом негладких функций, рассматриваемый критерий имеет меньшее распространение в задачах принятия решений, чем, например, квадратичная ошибка.

Так же как при анализе мультипликативных матриц, учет кососимметричной формы матрицы позволяет упростить выражение для критерия ψ_1 путем перехода от максимума абсолютных величин к максимуму самих этих величин.

Предложение 2. Справедливо равенство

$$\psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \max_{i,j} \left(a_{ij} - \left(x_i - x_j\right) \right).$$

Доказательство. Представим функцию ψ_1 в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) &= \max_{i,j} \left| a_{ij} - \left(x_i - x_j\right) \right| = \max_{i>j} \max \left\{ \left| a_{ij} - \left(x_i - x_j\right) \right|, \left| a_{ji} - \left(x_j - x_i\right) \right| \right\} = \\ &= \max_{i>j} \max \left\{ \left| a_{ij} - \left(x_i - x_j\right) \right|, \left| -a_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Величины $a_{ij} - (x_i - x_j)$ и $-a_{ij} + (x_i - x_j)$ являются противоположными, а потому имеют различные знаки (или одновременно равны нулю). Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) &= \max_{i>j} \max \left\{ a_{ij} - \left(x_i - x_j\right), -a_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \right\} = \\ &= \max_{i>j} \max \left\{ a_{ij} - \left(x_i - x_j\right), a_{ji} - \left(x_j - x_i\right) \right\} = \max_{i,j} \left(a_{ij} - \left(x_i - x_j\right) \right). \end{aligned}$$

Окончательно представим задачу аппроксимации в форме

$$\min_{\mathbf{X}} \psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}), \tag{2}$$

где минимум берется по всем кососимметрическим матрицам $\mathbf{X}$.

В следующем разделе статьи рассмотренные задачи аппроксимации мультипликативных и аддитивных матриц парных сравнений будут переформулированы и затем решены в терминах тропической математики.

ЭЛЕМЕНТЫ ТРОПИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Рассмотрим основные определения, обозначения и предварительные результаты тропической математики [Кривулин, 2009; Krivulin, 2012; 2014a; 2014b; 2015a; 2015b], на которые опираются предлагаемые решения задач аппроксимации матриц парных сравнений. Разнообразные материалы по вопросам теории, методов и приложений тропической математики, как вводного характера, так и предназначенные для углубленного изучения, представлены в отечественных [Маслов, Колокольцов, 1994; Литвинов, 2005; Колокольцов, Малафеев, 2012] и зарубежных работах [Golan, 2003; Heidergott, Olsder, van der Woude, 2006; Akian, Bapat, Gaubert, 2007; Butkovič, 2010].

Идемпотентное полуполе. Идемпотентным полуполем называется алгебраическая система $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$, где $\mathbb{X}$ — числовое множество, которое замкнуто относительно коммутативных операций $\oplus$ и $\otimes$, называемых обобщенными сложением и умножением, а также включает их нейтральные элементы $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$, называемые обобщенными нулем и единицей. Сложение является идемпотентным, т. е. удовлетворяет условию $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Выполняется свойство дистрибьютивности умножения относительно сложения и для каждого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1} такой, что $x^{-1} \otimes x = \mathbb{1}$.

Дополнительно предполагается, что идемпотентное полуполе является алгебраически замкнутым, что означает разрешимость уравнения $x^n = a$ при любых $a \in \mathbb{X}$ и натуральном n, а также линейно упорядоченным. Примерами идемпотентных полуполей, для которых эти предположения верны, являются $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$ и $\mathbb{R}_{\max,\times} = (\mathbb{R}_{+}, \max, \times, 0, 1)$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел и $\mathbb{R}_{+}$ — множество неотрицательных вещественных чисел.

В частности, в полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$ сложение определено как операция нахождения максимума двух чисел, а умножение — как обычное сложение, т. е. для любых $x, y \in \mathbb{R}_{\max,+}$ выполняется

$$x \oplus y = \max(x, y), \quad x \otimes y = x + y.$$

Роль нейтрального элемента по сложению играет $-\infty$, а по умножению — 0. Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует обратный по умножению x^{-1}, который совпадает с противоположным элементом $-x$ в обычной арифметике. Степень x^y определена для любых чисел x и y и соответствует обычному произведению xy. На множестве $\mathbb{R}_{\max,+}$ задан обычный линейный порядок.

В полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times}$ заданы операции $\oplus = \max$ и $\otimes = \times$, для которых имеются нейтральные элементы $\mathbb{0} = 0$ и $\mathbb{1} = 1$. Понятия обратного элемента и степени имеют обычный смысл. Это полуполе, очевидно, также линейно упорядочено.

При записи алгебраических выражений в следующих разделах знак умножения, как обычно, для краткости опускается. Обозначение степени используется в смысле операций идемпотентного полуполя.

Матрицы и векторы. Множество всех матриц, которые имеют m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$, обозначается через $\mathbb{X}^{m\times n}$. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, называется нулевой. Сложение и умножение двух матриц подходящего размера, а также умножение матрицы на число выполняются по стандартным правилам с заменой обычного сложения на операцию $\oplus$ и обычного умножения — на операцию $\otimes$.

Для любой ненулевой матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$ определена мультипликативно сопряженная матрица $\mathbf{A}^{-} = \left(a_{ij}^{-}\right) \in \mathbb{X}^{n\times m}$ с элементами $a_{ij}^{-} = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij}^{-} = \mathbb{0}$ — в противном случае. Иными словами, матрица $\mathbf{A}^{-}$ получается из матрицы $\mathbf{A}$ путем замены строк на столбцы (транспонирования) с последующим замещением всех ненулевых элементов обратными.

Рассмотрим множество квадратных матриц $\mathbb{X}^{n\times n}$. Матрица, диагональные элементы которой равны числу $\mathbb{1}$, а недиагональные — числу $\mathbb{0}$, является единичной и обозначается $\mathbf{I}$.

Целая неотрицательная степень квадратной матрицы $\mathbf{A}$ определяется обычным путем: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^p = \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{A}$ для всех целых $p \geq 1$.

След матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} \oplus \dots \oplus a_{nn}.$$

Нетрудно проверить, что для произведения матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ выполняется равенство

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}).$$

Множество всех векторов-столбцов размера n с элементами из $\mathbb{X}$ обозначается $\mathbb{X}^n$. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, называется нулевым. Вектор называется регулярным, если он не имеет нулевых компонент.

Множество $\mathbb{X}^n$ замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число, в которых роль обычного сложения и умножения играют соответственно операции $\oplus$ и $\otimes$, и называется идемпотентным векторным пространством.

Для любого вектора-столбца $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определен вектор-строка $\mathbf{x}^- = (x_i^-)$ с элементами $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$, — в противном случае.

Функции расстояния. Расстояние между регулярными векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{X}^n$ определяется при помощи функции расстояния, которая имеет вид

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^- \mathbf{x} \oplus \mathbf{x}^- \mathbf{y}.$$

Для полуполя $\mathbb{R}_{\max, +}$ функция ρ совпадает с метрикой Чебышева, которая для любых двух векторов $\mathbf{x} = (x_i)$ и $\mathbf{y} = (y_i)$ из $\mathbb{R}^n$ вычисляется по формуле

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

В случае $\mathbb{R}_{\max, \times}$ функция ρ отличается от чебышевской метрики только диапазоном значений и превращается в метрику Чебышева после применения к ней логарифма. В общем случае будем называть функцию ρ квазичебышевской метрикой.

Расстояние между регулярными матрицами $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ задается квазичебышевской метрикой

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^- \mathbf{B}) \oplus \operatorname{tr}(\mathbf{B}^- \mathbf{A}). \tag{3}$$

При интерпретации в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max, +}$ матричная функция ρ оказывается метрикой Чебышева. Действительно, нетрудно проверить, что для любых двух матриц $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ из $\mathbb{R}^{n \times n}$ выполняется

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max_{1 \le i, j \le n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

В контексте полуполя $\mathbb{R}_{\max, \times}$ функция ρ становится чебышевской метрикой после логарифмирования.

Собственное число и собственный вектор матрицы. Число $\lambda \in \mathbb{X}$ и ненулевой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n$ называются соответственно собственным значением и собственным вектором квадратной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, если они удовлетворяют равенству

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Любая матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, у которой нет нулевых элементов, имеет одно собственное число, которое называется спектральным радиусом матрицы и вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\mathbf{A}^n). \tag{4}$$

Для того чтобы найти все собственные векторы, которые соответствуют спектральному радиусу λ матрицы $\mathbf{A}$, сначала вычисляются матрицы

$$\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathbf{A},\ \mathbf{A}_\lambda^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A}_\lambda \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}_\lambda^{n-1},\ \mathbf{A}_\lambda^\times = \mathbf{A}_\lambda\mathbf{A}_\lambda^*.$$

Затем строится матрица $\mathbf{A}_\lambda^+$, составленная из тех столбцов матрицы $\mathbf{A}_\lambda^\times$, которые совпадают с соответствующими столбцами матрицы $\mathbf{A}_\lambda^*$. Любой собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, который отвечает λ, имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_\lambda^+\mathbf{u}, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}$ — ненулевой вектор подходящего размера. Из такой формы представления собственных векторов следует, что все они принадлежат идемпотентному векторному подпространству, которое порождают столбцы матрицы $\mathbf{A}_\lambda^+$. Учитывая, что все столбцы $\mathbf{A}_\lambda^+$ находятся среди столбцов матрицы $\mathbf{A}_\lambda^*$, множество собственных векторов, очевидно, является подпространством пространства столбцов этой матрицы.

Экстремальное свойство собственного числа. Предположим, что задана матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$. Рассмотрим задачу, которая формулируется в терминах общего идемпотентного полуполя в виде

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^-\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{6}$$

где минимум берется по всем регулярным векторам $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n$.

В контексте проблемы аппроксимации мультипликативных матриц парных сравнений согласованными матрицами такая задача впервые изучалась в работе [Elsner, van der Driessche, 2004], где она рассматривается в условиях полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$.

Уже в работе [Cuninghame-Green, 1962] было показано (см. также: [Engel, Schneider, 1975; Elsner, van der Driessche, 2004; Кривулин, 2006; 2009]), что минимум в задаче (6) совпадает со спектральным радиусом λ матрицы $\mathbf{A}$. При этом любой собственный вектор $\mathbf{x}$, который соответствует λ, является решением задачи.

В работе [Elsner, van der Driessche, 2010] было установлено, что решением задачи являются не только собственные векторы, для которых выполняется равенство $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, но и любой вектор $\mathbf{x}$, который удовлетворяет неравенству $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda\mathbf{x}$. В этой работе также был предложен алгоритмический подход к нахождению таких векторов при помощи некоторой итеративной вычислительной процедуры.

Полное аналитическое решение задачи приводится в работах [Krivulin, 2012; 2014a; 2015a; 2015b], где все решения представлены в компактной векторной форме.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{x}$ — общее регулярное решение задачи (6), где матрица $\mathbf{A}$ имеет спектральный радиус $\lambda > 0$, и пусть $\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathbf{A}$. Тогда минимум в задаче равен λ, а общее решение имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_\lambda^*\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{X}^n$— любой регулярный вектор.

На основе применения этого результата далее будут даны новые полные решения задачи аппроксимации матриц парных сравнений и вычисления вектора рейтингов альтернатив.

АППРОКСИМАЦИЯ МАТРИЦ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Впервые подход к аппроксимации мультипликативных матриц парных сравнений на основе результатов тропической математики был предложен в работах [Elsner, van der Driessche, 2004; 2010]. Однако полученные в них результаты не исчерпывают всего множества решений задачи аппроксимации и потому не дают ее полного решения.

В этом разделе статьи аппарат и методы тропической математики, развитые в [Кривулин, 2009; Krivulin, 2012; 2014a; 2015a], используются для унифицированного представления и полного решения в явном виде задач аппроксимации матриц парных сравнений согласованными матрицами. Применяется один и тот же общий подход к задачам аппроксимации матриц парных сравнений с использованием мультипликативной и аддитивной шкал. На основе указанного подхода предлагаются новые решения задач аппроксимации для обратно симметрических и кососимметрических матриц, а также для произвольных мультипликативных и аддитивных матриц парных сравнений.

На языке тропической математики как мультипликативная, так и аддитивная согласованные матрицы записываются в общей форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^-,$$

которая интерпретируется в контексте полуполя $\mathrm{R}_{\max,\times}$ для мультипликативной матрицы или полуполя $\mathrm{R}_{\max,+}$ — для аддитивной. Тогда проблема аппроксимации может быть представлена как задача нахождения согласованной матрицы $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^-$ или, что равносильно, как задача вычисления вектора $\mathbf{x}$, при которых достигается минимум

$$\min_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-),$$

где φ — некоторый выбранный критерий точности аппроксимации, отражающий степень различия между матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{X}$.

Аппроксимация мультипликативных матриц. Рассмотрим задачу аппроксимации (1) в соответствии с критерием минимума относительной ошибки

$$\varphi_1'(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \varphi_1'(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-) = \max_{i,j} \frac{a_{ij} x_j}{x_i},$$

где $\mathbf{x} = (x_i)$ — вектор относительных рейтингов альтернатив.

Заменим в последнем выражении обычные алгебраические операции на операции полуполя $\mathrm{R}_{\max,\times}$, а затем перейдем к векторной форме записи, чтобы получить

$$\varphi_1'(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \bigoplus_{i,j} x_i^{-1} a_{ij} x_j = \mathbf{x}^- \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Теперь задача (1) принимает форму (6), а это позволяет применить теорему 1.

Имеет место следующее прямое следствие из теоремы 1, сформулированное в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{A}$ — обратно симметрическая мультипликативная матрица парных сравнений с собственным числом λ. Тогда минимум в задаче (1) равен λ, а вектор относительных рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_\lambda^* \mathbf{u}, \tag{7}$$

где $\mathbf{u}$ — любой вектор с положительными координатами.

Следующий пример иллюстрирует применение результата теоремы 2.

Пример 3. Предположим, что при проведении парных сравнений четырех альтернатив по мультипликативной шкале получена обратно симметрическая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы построить вектор $\mathbf{x}$ рейтингов альтернатив, сначала вычислим λ по формуле (3). Для этого найдем степени матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 & 4 \\ 1/3 & 1 & 2 & 4/3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 48 & 16 & 4 \\ 1 & 6 & 16/3 & 4/3 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 16 & 48 & 16 & 32 \\ 8/3 & 16 & 16/3 & 4 \\ 4 & 24 & 16 & 4 \\ 4 & 16 & 32 & 16 \end{pmatrix}.$$

После вычисления следа полученных матриц

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = 1,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}^2 = 1,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}^3 = 8,\ \operatorname{tr}\mathbf{A}^4 = 16$$

окончательно находим

$$\lambda = \operatorname{tr}\mathbf{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}\left(\mathbf{A}^2\right) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}\left(\mathbf{A}^3\right) \oplus \operatorname{tr}^{1/4}\left(\mathbf{A}^4\right) = 2.$$

Для построения вектора рейтингов альтернатив по формуле (7) составим матрицу

$$\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/4 \\ 1/4 & 3/2 & 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

а затем вычислим матрицы

$$\mathbf{A}_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 2 & 4 & 1 \\ 1/12 & 1/4 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/4 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1/2 \\ 1/8 & 3/4 & 2/3 & 1/6 \\ 1/8 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

Теперь найдем матрицу

$$\mathbf{A}_\lambda^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A}_\lambda \oplus \mathbf{A}_\lambda^2 \oplus \mathbf{A}_\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1/6 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все столбцы матрицы $\mathbf{A}_\lambda^*$ пропорциональны друг другу: например, нетрудно проверить, что второй, третий и четвертый ее столбцы могут быть получены из первого путем умножения на числа 6, 4 и 2 соответственно. Учитывая, что тогда каждый из столбцов порождает одно и то же пространство векторов, при записи вектора $\mathbf{x}$ по формуле (7) можно взять только один из столбцов матрицы, например первый столбец. Вектор относительных рейтингов альтернатив записывается в виде

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/6 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} u,$$

где число u может быть выбрано произвольно в зависимости от требуемой формы или способа интерпретации результата.

Положим $u = 1$. Тогда в соответствии с найденным вектором $\mathbf{x} = (1, 1/6, 1/4, 1/2)^T$ наибольший рейтинг имеет первая альтернатива со значением рейтинга $x_1 = 1$. За ней следуют четвертая и третья альтернативы ($x_4 = 1/2$ и $x_3 = 1/4$). Вторая альтернатива имеет наименьший рейтинг со значением $x_2 = 1/6$.

Если желательно интерпретировать рейтинги альтернатив как некоторые веса, которые в сумме равны единице, то следует выбрать $u = 1/(1+1/6+1/4+1/2) = 12/23$. Тогда вектор альтернатив можно записать в виде $\mathbf{x} = (12/23, 2/23, 3/23, 6/23)^T$.

Сравнение с известными решениями. Результат, представленный в теореме 2, существенно обобщает известные решения в работах [Elsner, van der Driessche, 2004; 2010]. Учитывая, что линейная оболочка столбцов матрицы $\mathbf{A}_\lambda^*$ всегда включает собственные векторы $\mathbf{A}$ (см., напр.: [Кривулин, 2009]), полученное множество решений оказывается шире множества решений, найденного в [Elsner, van den Driessche, 2004], где оно ограничивалось только собственными векторами.

Вместо нахождения частных решений при помощи численного алгоритма в [Elsner, van der Driessche, 2010] результат теоремы предлагает все решения, записанные в явном виде в векторной форме, которая является удобной как для последующего анализа, так и для практических вычислений.

Заметим, что пространство собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ (пространство столбцов матрицы $\mathbf{A}_\lambda^+$) в общем случае является более узким, чем пространство столбцов матрицы $\mathbf{A}_\lambda^*$, которое указано в теореме. Кроме того, оказывается, что столбцы $\mathbf{A}_\lambda^*$, которые не принадлежат пространству собственных векторов, могут давать более точное решение задачи аппроксимации, чем собственные векторы.

Пример 4. Пусть имеется матрица парных сравнений, составленная в результате оценки четырех альтернатив:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с последней строкой матрицы четвертая альтернатива в два раза предпочтительнее каждой из первых трех альтернатив и потому должна иметь наибольший рейтинг. Три первые альтернативы имеют более низкий рейтинг, но далее дифференцированы быть не могут.

Для анализа альтернатив сначала по формуле (3) найдем $\lambda = 2$ и определим

$$\mathbf{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицы

$$\mathbf{A}_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы применить формулы (7) и (5), найдем матрицы

$$\mathbf{A}_\lambda^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A}_\lambda \oplus \mathbf{A}_\lambda^2 \oplus \mathbf{A}_\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\lambda^\times = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_\lambda^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Первые три столбца у матриц $\mathbf{A}_\lambda^*$ и $\mathbf{A}_\lambda^\times$ совпадают, откуда следует, что

$$\mathbf{A}_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Идентичные столбцы матрицы $\mathbf{A}_\lambda^+$ определяют один собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, который в контексте принятия решений не позволяет ранжировать альтернативы.

Решения, которые предлагает теорема 2, включают наряду с указанными столбцами четвертый столбец матрицы $\mathbf{A}_\lambda^*$. Этот вектор позволяет ранжировать альтернативы в полном соответствии с данными матрицы парных сравнений (в частности, показывает наибольший рейтинг четвертой альтернативы).

Минимизация квазичебышевского расстояния. Естественный критерий точности аппроксимации задается в терминах тропической математики в виде квазичебышевского расстояния между матрицами. Покажем, что такой критерий совпадает с критерием на основе вычисления относительной ошибки, который использовался ранее.

Применяя формулу (3), запишем функцию квазичебышевского расстояния в виде

$$\varphi_2(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \varphi_2(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-) = \rho(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-) = \mathrm{tr}\left((\mathbf{x}\mathbf{x}^-)^- \mathbf{A}\right) \oplus \mathrm{tr}(\mathbf{A}^- \mathbf{x}\mathbf{x}^-).$$

Заметим, что в смысле полуполя $R_{\max,+}$ эта функция расстояния совпадает с метрикой Чебышева.

В силу того что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{x}\mathbf{x}^-$ являются обратно симметрическими, для них выполняются равенства $(\mathbf{x}\mathbf{x}^-)^- = \mathbf{x}\mathbf{x}^-$ и $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}$. Тогда с учетом свойств следа произведения матриц рассматриваемый критерий принимает вид

$$\varphi_2(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \mathrm{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^- \mathbf{A}) \oplus \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^-) = \mathrm{tr}(\mathbf{x}^- \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^- \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Следовательно, минимизация квазичебышевского расстояния приводит к такой же задаче, как и предыдущая. Утверждение теоремы 2, очевидно, сохраняет свою силу для φ_2.

Произвольные мультипликативные матрицы. Предположим, что имеется матрица парных сравнений $\mathbf{A}$, которая получена с помощью мультипликативной шкалы, но не является обратно симметрической [Gonzalez-Pachon, Rodriguez-Galiano, Romero, 2003]. Такая матрица может появиться, например, вследствие ошибок при составлении обратно симметрической матрицы или в результате применения несимметричной процедуры парных сравнений.

Для аппроксимации матрицы $\mathbf{A}$ согласованной матрицей применим критерий на основе квазичебышевского расстояния. Определим функцию

$$\varphi_3(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \varphi_3(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-) = \mathrm{tr}\left((\mathbf{x}\mathbf{x}^-)^- \mathbf{A}\right) \oplus \mathrm{tr}(\mathbf{A}^- \mathbf{x}\mathbf{x}^-).$$

Рассмотрим задачу

$$\min_{\mathbf{x}} \varphi_3(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-). \tag{8}$$

Используя свойства следа матрицы, а затем группируя слагаемые, запишем целевую функцию задачи в виде

$$\varphi_3(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-) = \mathrm{tr}(\mathbf{x}^- \mathbf{A}\mathbf{x}) \oplus \mathrm{tr}(\mathbf{x}^- \mathbf{A}^- \mathbf{x}) = \mathbf{x}^- \mathbf{A}\mathbf{x} \oplus \mathbf{x}^- \mathbf{A}^- \mathbf{x} = \mathbf{x}^- (\mathbf{A}^- \oplus \mathbf{A})\mathbf{x}.$$

Теперь, применяя результат теоремы 1, приходим к следующему утверждению в смысле полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{A}$ — мультипликативная матрица парных сравнений, матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-} \oplus \mathbf{A}$ имеет собственное число μ и $\mathbf{B}_{\mu} = \mu^{-1}\mathbf{B}$. Тогда минимум в задаче (8) равен μ, а вектор относительных рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_{\mu}^{*}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — любой положительный вектор.

Заметим, что предыдущий результат (теорема 2) для обратно симметрической матрицы, для которой выполняются равенства $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-}$ и $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-} \oplus \mathbf{A}$, можно рассматривать как прямое следствие этой теоремы.

Пример 5. Рассмотрим обратно симметрическую матрицу парных сравнений, исследованную в примере 3, и составим новую матрицу, которая содержит близкие результаты, но не является обратно симметрической:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения вектора рейтингов применим теорему 3. Сначала составим матрицы

$$\mathbf{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-} \oplus \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти μ, вычислим матрицы

$$\mathbf{B}^{2} = \begin{pmatrix} 4/3 & 8 & 16 & 4 \\ 1/3 & 3/2 & 2 & 4/3 \\ 1 & 3 & 3/2 & 2 \\ 2 & 12 & 4 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{3} = \begin{pmatrix} 8 & 48 & 16 & 16/3 \\ 1 & 6 & 16/3 & 4/3 \\ 1 & 9/2 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{4} = \begin{pmatrix} 16 & 48 & 24 & 32 \\ 8/3 & 16 & 16/3 & 4 \\ 4 & 24 & 16 & 4 \\ 4 & 18 & 32 & 16 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (3), получаем $\mu = 2$.

Теперь найдем матрицу $\mathbf{B}_\mu^*$. Для этого рассмотрим матрицу

$$\mathbf{B}_\mu = \mu^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/2 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Затем последовательно вычислим матрицы

$$\mathbf{B}_\mu^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2 & 4 & 1 \\ 1/12 & 3/8 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\mu^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 2/3 \\ 1/8 & 3/4 & 2/3 & 1/6 \\ 1/8 & 9/16 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_\mu^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{B}_\mu \oplus \mathbf{B}_\mu^2 \oplus \mathbf{B}_\mu^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1/6 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что найденная матрица $\mathbf{B}_\mu^*$ совпадает с матрицей $\mathbf{A}_\lambda^*$, полученной в примере 3. Учитывая, что по теореме 3 вектор рейтингов $\mathbf{x}$ полностью определяется такой матрицей, рассматриваемая задача имеет то же самое решение, что и задача в примере 3. В частности, в качестве вектора относительных рейтингов альтернатив можно взять, например, $\mathbf{x} = (1, 1/6, 1/4, 1/2)^T$.

Аддитивные матрицы сравнений. Выясним, каким образом полученные в этом разделе результаты могут быть распространены на задачи анализа парных сравнений с использованием аддитивной шкалы.

Рассмотрим задачу (2) аппроксимации матрицы $\mathbf{A}$ согласованной аддитивной матрицей $\mathbf{X} = (x_{ij})$ с элементами $x_{ij} = x_i - x_{ji}$ в соответствии с критерием минимума абсолютной ошибки $\psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-)$, где $\mathbf{x} = (x_\mathrm{i})$ — вектор, составленный из элементов x_i.

Переходя к обозначениям полуполя $\mathrm{R}_{\max,+}$, запишем целевую функцию в эквивалентной форме $\psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \mathbf{x}^-\mathbf{A}\mathbf{x}$ и проанализируем задачу нахождения минимума

$$\min_{\mathbf{x}} \psi_1(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^-) \tag{9}$$

по всем векторам $\mathbf{x}$ с вещественными компонентами.

Применяя теорему 1, приходим к утверждению, которое аналогично теореме 2, где вместо полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ берется $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{A}$ — кососимметрическая аддитивная матрица парных сравнений с собственным числом λ. Тогда минимум в задаче (2) равен λ, а вектор относительных рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{\lambda}^{*}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — любой вектор с вещественными компонентами.

Очевидно, что использованная в задаче (9) абсолютная ошибка является расстоянием Чебышева между матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{X}$. Так же как для мультипликативных матриц, введем критерий

$$\psi_2(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \psi_2(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \rho(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \mathrm{tr}\left((\mathbf{x}\mathbf{x}^{-})^{-}\mathbf{A}\right) \oplus \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-}\mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \mathbf{x}^{-}\mathbf{A}\mathbf{x},$$

который теперь понимается в смысле полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ и совпадает с метрикой Чебышева.

Если матрица парных сравнений $\mathbf{A}$ не является кососимметрической, то будем рассматривать в $\mathbb{R}_{\max,+}$ задачу

$$\min_{\mathbf{x}} \psi_3(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) \tag{10}$$

с целевой функцией в виде

$$\varphi_3(\mathbf{A}, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \mathrm{tr}(\mathbf{x}^{-}\mathbf{A}\mathbf{x}) \oplus \mathrm{tr}(\mathbf{x}^{-}\mathbf{A}^{-}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-}(\mathbf{A}^{-} \oplus \mathbf{A})\mathbf{x}.$$

Решение этой задачи дает следующий результат в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$, который формально повторяет соответствующую теорему для мультипликативных матриц.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{A}$ — аддитивная матрица парных сравнений, матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-} \oplus \mathbf{A}$ имеет собственное число μ и $\mathbf{B}_{\mu} = \mu^{-1}\mathbf{B}$. Тогда минимум в задаче (10) равен μ, а вектор относительных рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_{\mu}^{*}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — любой вещественный вектор.

АППРОКСИМАЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ МАТРИЦ

При практических исследованиях предпочтений вместо одной матрицы парных сравнений обычно имеется несколько матриц. Задача одновременной аппроксимации нескольких матриц парных сравнений с нахождением общего вектора относительных рейтингов альтернатив возникает, например, при обработке результатов сравнения одних и тех же альтернатив разными респондентами по одному критерию (задача анализа групповых предпочтений) или одним респондентом по разным критериям (многокритериальная задача).

Пусть требуется оценить вектор относительных рейтингов альтернатив на основе нескольких матриц парных сравнений, построенных с использованием одной и той же шкалы. Если используется несколько критериев для сравнения, то предполагается, что все критерии имеют равную значимость (вес). Задачу можно сформулировать следующим образом.

Даны m матриц парных сравнений $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$. Необходимо найти согласованную матрицу $\mathbf{X}$, которая аппроксимирует все матрицы одновременно, т. е. решить задачу

$$\min_{\mathbf{X}} \max\left\{\phi(\mathbf{A}_1, \mathbf{X}), \ldots, \phi(\mathbf{A}_m, \mathbf{X})\right\},$$

где ϕ — некоторая выбранная мера ошибки аппроксимации.

Опираясь на решение задач аппроксимации для одной матрицы с помощью методов тропической математики, будем строить процедуры решения задач с несколькими матрицами. Учитывая, что в терминах тропической математики мультипликативные и аддитивные задачи, а также их решения записываются в общем виде в одинаковой форме, далее различие между ними делать не будем.

Представив согласованную матрицу в форме $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}$, где $\mathbf{x}$ — вектор, компоненты которого, как обычно, имеют смысл относительных рейтингов альтернатив, приходим к общей задаче минимизации относительно $\mathbf{x}$ критерия

$$\Phi(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \max_{1 \le i \le m} \rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) \oplus \cdots \oplus \rho(\mathbf{A}_m, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}), \quad (11)$$

где ρ — функция ошибки в виде чебышевского расстояния для аддитивных задач или квазичебышевского — для мультипликативных.

Обратно и кососимметрические матрицы. Сначала предположим, что матрицы парных сравнений для всех $i = 1, \ldots, m$ удовлетворяют условию $\mathbf{A}_i^{-} = \mathbf{A}_i$ и, следовательно, являются обратно или кососимметрическими в зависимости от контекста (мультипликативного или аддитивного).

Учитывая, что при этих условиях, как было показано, выполняется равенство $\rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \mathbf{x}^{-}\mathbf{A}_i\mathbf{x}$, критерий аппроксимации (11) принимает вид

$$\Phi_1(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}) = \mathbf{x}^{-}\mathbf{A}_1\mathbf{x} \oplus \cdots \oplus \mathbf{x}^{-}\mathbf{A}_m\mathbf{x} = \mathbf{x}^{-}(\mathbf{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}_m)\mathbf{x}.$$

Окончательно приходим к задаче

$$\min_{\mathbf{x}} \Phi_1(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}). \quad (12)$$

Применение теоремы 1 дает результат, который формулируется в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ (полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$) следующим образом.

Теорема 6. Пусть $\mathbf{A}_i$ — обратно и кососимметрические матрицы для всех $i = 1, \ldots m$; матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}_m$ имеет собственное число μ и $\mathbf{B}\mu = \mu^{-1}\mathbf{B}$. Тогда минимум в задаче (12) равен μ, а вектор относительных рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_\mu^* \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — любой положительный (вещественный) вектор.

Следующий пример иллюстрирует применение результата теоремы 6 для обратно симметрических матриц в контексте полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$.

Пример 6. Рассмотрим задачу аппроксимации с нахождением относительных рейтингов альтернатив для $m = 2$ мультипликативных обратно симметрических матриц:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 1/4 \\ 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы применить теорему 6 для нахождения вектора относительных рейтингов альтернатив, вычислим матрицу

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица $\mathbf{B}$, которая определяет вектор рейтингов альтернатив $\mathbf{x}$, совпадает с аналогичной матрицей в задаче, исследованной в примере 5. Это позволяет воспользоваться результатами решения этого примера, которые показывают, что вектор относительных рейтингов альтернатив можно записать в виде $\mathbf{x} = (1, 1/6, 1/4, 1/2)^T$.

Произвольные матрицы парных сравнений. Пусть для всех $i = 1, \ldots m$ имеются мультипликативные (аддитивные) матрицы парных сравнений $\mathbf{A}_i$, которые не обязательно являются обратно и кососимметрическими. В этом случае будем решать задачу

$$\min_{\mathbf{x}} \Phi_2(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{x}), \tag{13}$$

где целевая функция имеет форму критерия (11).

В силу того что теперь $\rho\left(\mathbf{A}_i, \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}\right) = \mathbf{x}^{-}\left(\mathbf{A}_i^{-} \oplus \mathbf{A}_i\right)\mathbf{x}$, имеем

$$\Phi_2\left(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{x}\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{x}^{-}\left(\mathbf{A}_i^{-} \oplus \mathbf{A}_i\right)\mathbf{x} = \mathbf{x}^{-}\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\left(\mathbf{A}_i^{-} \oplus \mathbf{A}_i\right)\right)\mathbf{x}.$$

Тогда теорема 6 принимает следующий вид в смысле $\mathbb{R}_{\max,\times}$ ($\mathbb{R}_{\max,+}$).

Теорема 7. Пусть $\mathbf{A}_i$ — мультипликативные (аддитивные) матрицы парных сравнений для всех $i = 1, \ldots, m$; матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1^{-} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}_m \oplus \mathbf{A}_m^{-}$ имеет собственное число μ и $\mathbf{B}_\mu = \mu^{-1}\mathbf{B}$. Тогда минимум в задаче (13) равен μ, а вектор относительных рейтингов альтернатив имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_\mu^{*}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — любой положительный (вещественный) вектор.

Пример 7. Рассмотрим задачу аппроксимации с нахождением вектора относительных рейтингов альтернатив для мультипликативных матриц:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 1/4 \\ 1/3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала вычислим матрицы

$$\mathbf{A}_1^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 1/4 \\ 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1^{-} \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{A}_2^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{B}$ в этом примере совпадает с матрицей, полученной в примере 6. Поэтому форма вектора рейтингов альтернатив $\mathbf{x}$ для обоих примеров будет одна и та же.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что предлагаемые методы имеют ряд преимуществ, которые позволяют рассматривать их в качестве более эффективного инструмента маркетинговых исследований по сравнению с другими подходами к анализу предпочтений на основе парных сравнений.

Методы тропической математики, как и другие методы, дают возможность через аппроксимацию матрицы парных сравнений получить вектор степеней предпочтения (весов, рейтингов), что является главной целью при работе с матрицами парных сравнений. При этом аппроксимация производится одновременно с нахождением собственного вектора (в терминах тропической математики). Точнее, аппроксимация состоит в нахождении этого собственного вектора, по которому может быть построена аппроксимирующая матрица. Так как нас интересует как раз собственный вектор, а не сама матрица (важно только быть уверенным в том, что она согласованная), то непосредственно вычислять матрицу не обязательно.

В отличие от других подходов к анализу матриц парных сравнений, методы тропической математики обладают определенными преимуществами. Одно из главных их достоинств состоит в том, что они, опираясь на простой, хотя и не совсем привычный математический аппарат, позволяют получить прямое решение задачи аппроксимации матрицы парных сравнений и нахождения вектора относительных рейтингов альтернатив в компактной векторной форме в виде готовых к использованию простых выражений для вычисления координат указанного вектора.

Такая форма решения существенно уменьшает вычислительные затраты по сравнению с другими подходами, которые опираются на довольно сложные и трудоемкие алгоритмические решения. Кроме того, с увеличением объема исходной информации, например при необходимости одновременной обработки результатов парных сравнений большого числа респондентов, эти затраты возрастают незначительно.

Особенностью использования тропической математики является общая универсальная форма представления задачи и ее решения, которая не зависит от вида шкалы (мультипликативная или аддитивная), используемой для сравнений. Это позволяет установить прямую логическую связь между мультипликативной и аддитивной постановками задач анализа предпочтений, а также перейти от одной постановки к другой в зависимости от интерпретации задачи.

Нахождение вектора относительных рейтингов альтернатив с использованием расчетных формул на основе тропической математики заключается в выполнении фиксированного числа несложных арифметических операций. Простота вычислительного аппарата дает возможность проводить их на компьютере без использования специализированных программных средств силами персонала, не обладающего особой квалификацией, а также при помощи простейших вычислительных приспособлений, что может оказаться актуальным при необходимости срочного выполнения аналитических расчетов в повседневной практике маркетинговых исследований.

Наконец, приведенные в работе примеры показывают, что решения, полученные на основе методов тропической математики, отличаются сравнительно низкой чувствительностью по отношению к малым изменениям исходных данных, что повышает степень достоверности и обоснованности полученных результатов.

Указанные выше преимущества позволяют говорить о повышении эффективности маркетинговых исследований на основе методов тропической математики, так как одновременно происходят снижение затрат на обработку информации и увеличение степени обоснованности результатов.

В заключение отметим, что методы тропической математики находят широкое применение в решении целого ряда других задач экономики и управления. Речь идет о задачах, которые могут быть описаны при помощи математических моделей на основе арифметики, где в роли сложения выступает операция вычисления максимума (минимума). В частности, методы тропической математики позволяют получить простые и компактные решения для задач сетевого планирования, в которых требуется построить оптимальный план выполнения работ при условии различных ограничений на порядок и сроки их выполнения с учетом заданных критериев оптимальности плана [Krivulin, 2014a; 2015a; 2015b]. Еще одним примером является эффективное решение минимаксных задач оптимального размещения объектов на плоскости и в пространстве с использованием различных функций расстояния (метрика Чебышева и прямоугольная метрика) при наличии ограничений на допустимую область размещения [Krivulin, 2014b]. Во всех этих задачах применение тропической математики предоставляет возможность получить описанные выше преимущества.

Литература

Гладких И. В., Светланова Ж. В. Измерение значимости характеристик товара в маркетинговых исследованиях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. Менеджмент. 2006. Вып. 2. С. 65–87.

Дэвид Г. Метод парных сравнений / Пер. с англ.; под ред. Ю. Адлер. М.: Статистика, 1978.

Колокольцов В. Н., Малафеев О. А. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации. СПб.: Лань, 2012.

Кривулин Н. К. Собственные значения и векторы матрицы в идемпотентной алгебре // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. Математика. 2006. Вып. 2. С. 29–40.

Кривулин Н.К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.

Кривулин Н.К., Гладких И.В. Методы построения согласованной матрицы результатов парных сравнений на основе тропической математики // Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления / Под ред. Н.К.Кривулина. СПб.: ВВМ, 2013. С.4–32.

Литвинов Г.Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т.326. С.145–182.

Маслов В.П., Колокольцов В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994.

Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. № 7. С.1261–1270.

Подиновский В.В., Подиновская О.В. О некорректности метода иерархий // Проблемы управления. 2011. Т.1. С.8–13.

Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Пер. с англ. Р.Г.Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993.

Akian M., Bapat R., Gaubert S. Max-Plus Algebra // Handbook of Linear Algebra. Discrete Mathematics and Its Applications / Ed. by L.Hogben. Boca Raton, FL: Taylor and Francis, 2007. P.25-1–25-17. doi:10.1201/9781420010572.ch25.

Barzilai J. Deriving Weights from Pairwise Comparison Matrices // Journal of Operational Research Society. 1997. Vol.48. N 12. P.1226–1232.

Butkovič P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010.

Chu M.T. On the Optimal Consistent Approximation to Pairwise Comparison Matrices // Linear Algebra and Its Application. 1998. Vol.272. N 1–3. P.155–168.

Cuninghame-Green R. A. Describing Industrial Processes with Interference and Approximating Their Steady-State Behaviour // Oper. Res. Quart. 1962. Vol.13. N 1. P.95–100.

Dahl G. A Method for Approximating Symmetrically Reciprocal Matrices by Transitive Matrices // Linear Algebra and Its Application. 2005. Vol.403. P.207–215.

Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and Pairwise Comparison Matrices // Linear Algebra and Its Application. 2004. Vol.385. P.47–62.

Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and Pairwise Comparison Matrices, II // Linear Algebra and Its Application. 2010. Vol.432. N 4. P.927–935.

Engel G.M., Schneider H. Diagonal Similarity and Equivalence for Matrices over Groups with 0 // Czechoslovak Mathematical Journal. 1975. Vol.25. N 3. P.389–403.

Farkas A., Lancaster P., Rózsa P. Consistency Adjustments for Pairwise Comparison Matrices // Numerical Linear Algebra with Applications. 2003. Vol.10. N 8. P.689–700.

Golan J.S. Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications // Mathematics and Its Applications. Vol.556. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Gonzalez-Pachon J., Rodriguez-Galiano M.I., Romero C. Transitive Approximation to Pairwise Comparison Matrices by Using Interval Goal Programming // Journal of Operational Research Society. 2003. Vol.54. N 5. P.532–538.

Guh Y.-Y., Po R.-W., Lou K.-R. An Additive Scale Model for the Analytic Hierarchy Process // International Journal Inform. Management Sci. 2009. Vol. 20. N 1. P. 71–88.

Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems // Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2006.

Ji P., Jiang R. Scale Transitivity in the AHP // The Journal of Operational Research Society. 2003. Vol. 54. N 8. P. 896–905.

Krivulin N. A Tropical Extremal Problem with Nonlinear Objective Function and Linear Inequality Constraints // Advances in Computer Science / Ed. by S. Yenuri / Recent Advances in Computer Engineering Series. Vol. 5. WSEAS Press, 2012. P. 216–221.

Krivulin N. A Constrained Tropical Optimization Problem: Complete Solution and Application Example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications / Eds. G. L. Litvinov, S. N. Sergeev / Contemporary Mathematics. Vol. 616. Providence, RI: AMS, 2014a. P. 163–177. doi:10.1090/conm/616/12308.

Krivulin N. Complete Solution of a Constrained Tropical Optimization Problem with Application to Location Analysis // Relational and Algebraic Methods in Computer Science / Eds. P. Hoefner, P. Jipsen, W. Kahl, M. E. Mueller / Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8428. Switzerland: Springer, 2014b. P. 362–378. doi:110.1007/978-3-319-06251-8_22.

Krivulin N. Extremal Properties of Tropical Eigenvalues and Solutions to Tropical Optimization Problems // Linear Algebra and Its Application. 2015a. Vol. 468. P. 211–232. doi:10.1016/j.laa.2014.06.044.

Krivulin N. A Multidimensional Tropical Optimization Problem with Nonlinear Objective Function and Linear Constraints // Optimization. 2015b. Vol. 64. N 5. P. 1107–1129. In press. doi:10.1080/02331934.2013.840624.

Saaty T. L., Vargas L. G. Comparison of Eigenvalue, Logarithmic Least Squares and Least Squares Methods in Estimating Ratios // Mathematical Modelling. 1984. Vol. 5. N 5. P. 309–324.

Thurstone L. L. Attitudes Can Be Measured // American Journal of Sociology. 1928. Vol. 33. N 4. P. 529–554.

Thurstone L. L. The Measurement of Change in Social Attitude // Journal of Social Psychology. 1931. Vol. 2. P. 230–235.

Thurstone L. L., Chave E. J. The Measurement of Attitude: A Psychophysical Method and Experiments with a Scale for Measuring Attitude Toward the Church. 7th ed. Chicago: University of Chicago Press, 1929.

References

Gladkikh I. V., Svetlanova Zh. V. Izmerenie znachimosti kharakteristik tovara v marketingovykh issledovaniyakh (The Measurement of Product Characteristics Importance in Marketing Research). *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. Menedzhment.* 2006. Vyp. 2. S. 65–87.

Dehvid G. *Metod parnykh sravnenij* (The Method of Paired Compares). Per. s angl.; pod red. Yu. Adler. Moscow: Statistika, 1978.

Kolokol'tsov V.N., Malafeev O.A. *Matematicheskoe modelirovanie mnogoagentnykh sistem konkurentsii i kooperatsii* (Mathematical Modeling of Multi-Agent Systems of Competition and Cooperation). Saint-Peterburg: Lan', 2012.

Krivulin N.K. Sobstvennye znacheniya i vektory matritsy v idempotentnoj algebre (Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices in Idempoten Algebra). *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. Menedzhment.. Ser. Matematika*. 2006. Vyp. 2. P. 29–40.

Krivulin N.K. *Metody idempotentnoj algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem* (Idempotent Algebra Methods for Modeling and Analysis of Complex Systems). Saint-Petersburg: SPbSU, 2009.

Krivulin N.K., Gladkikh I.V. Metody postroeniya soglasovannoj matritsy rezul'tatov parnykh sravnenij na osnove tropicheskoj matematiki (Methods of Constructing a Coherent Matrix of Pairwise Comparisons of the Results on the Basis of Tropical Mathematics). *Modeli i metody tropicheskoj matematiki v prikladnykh zadachakh ehkonomiki i upravleniya* (Models and Methods of Tropical Mathematics in Applied Economics and Management). Pod red. N.K. Krivulina. Saint-Petersburg: VVM, 2013. P. 4–32.

Litvinov G.L. Dekvantovanie Maslova, idempotentnaya i tropicheskaya matematika: kratkoe vvedenie (Maslov Dequantization, Idempotent and Tropical Mathematics: A Brief Introduction). *Zapiski nauchnogo seminara POMI.* 2005. T. 326. P. 145–182.

Maslov V.P., Kolokol'tsov V.N. *Idempotentnyj analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* (Idempotent Analysis and Its Application in Optimal Control). Moscow: Fizmatlit, 1994.

Nogin V.D. Uproshhennyj variant metoda analiza ierarkhij na osnove nelinejnoj svertki kriteriev (A Simplified Variant of the Hierarchy Analysis on the Ground of Nonlinear Convolution of Criteria). *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* 2004. T. 44. N 7. P. 1261–1270.

Podinovskij V.V., Podinovskaya O.V. O nekorrektnosti metoda ierarkhij (On the Theoretical Incorrectness of the Analytic Hierarchy Process). *Problemy upravleniya*. 2011. T. 1. P. 8–13.

Saati T. *Prinyatie reshenij. Metod analiza ierarkhij* (Decision Making: The Analytical Hierarchy Process). Per. s angl. R.G. Vachnadze. Moscow: Radio i svyaz', 1993.

Akian M., Bapat R., Gaubert S. Max-plus Algebra. *Handbook of Linear Algebra. Discrete Mathematics and Its Applications*. Ed. by L. Hogben. Boca Raton, FL: Taylor and Francis. 2007. P. 25-1–25-17. doi:10.1201/9781420010572.ch25.

Barzilai J. Deriving Weights from Pairwise Comparison Matrices. *Journal of Operational Research Society*. 1997. Vol. 48. N 12. P. 1226–1232.

Butkovič P. *Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics*. London: Springer, 2010.

Chu M.T. On the Optimal Consistent Approximation to Pairwise Comparison Matrices. *Linear Algebra and Its Application*. 1998. Vol. 272. N 1–3. P. 155–168.

Cuninghame-Green R.A. Describing Industrial Processes with Interference and Approximating Their Steady-State Behaviour. *Oper. Res. Quart.* 1962. Vol. 13. N 1. P. 95–100.

Dahl G. A Method for Approximating Symmetrically Reciprocal Matrices by Transitive Matrices. *Linear Algebra and Its Application*. 2005. Vol. 403. P. 207–215.

Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and Pairwise Comparison Matrices. *Linear Algebra and Its Application*. 2004. Vol. 385. P. 47–62.

Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and Pairwise Comparison Matrices, II. *Linear Algebra and Its Application*. 2010. Vol. 432. N 4. P. 927–935.

Engel G. M., Schneider H. Diagonal Similarity and Equivalence for Matrices over Groups with 0. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1975. Vol. 25. N 3. P. 389–403.

Farkas A., Lancaster P., Rózsa P. Consistency Adjustments for Pairwise Comparison Matrices. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2003. Vol. 10. N 8. P. 689–700.

Golan J. S. Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications. *Mathematics and Its Applications*. Vol. 556. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Gonzalez-Pachon J., Rodriguez-Galiano M. I., Romero C. Transitive Approximation to Pairwise Comparison Matrices by Using Interval Goal Programming. *Journal of Operational Research Society*. 2003. Vol. 54. N 5. P. 532–538.

Guh Y.-Y., Po R.-W., Lou K.-R. An Additive Scale Model for the Analytic Hierarchy Process. *International Journal Inform. Management Science*. 2009. Vol. 20. N 1. P. 71–88.

Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems. *Princeton Series in Applied Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 2006.

Ji P., Jiang R. Scale Transitivity in the AHP // The Journal of Operational Research Society. 2003. Vol. 54. N 8. P. 896–905.

Krivulin N. A Tropical Extremal Problem with Nonlinear Objective Function and Linear Inequality Constraints. *Advances in Computer Science*. Ed. by S. Yenuri. Recent Advances in Computer Engineering Series. Vol. 5. WSEAS Press, 2012. P. 216–221.

Krivulin N. A Constrained Tropical Optimization Problem: Complete Solution and Application Example. *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications*. Eds. G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Contemporary Mathematics. Vol. 616. Providence, RI: AMS, 2014a. P. 163–177. doi:10.1090/conm/616/12308.

Krivulin N. Complete Solution of a Constrained Tropical Optimization Problem with Application to Location Analysis. *Relational and Algebraic Methods in Computer Science*. Eds. P. Hoefner, P. Jipsen, W. Kahl, M. E. Mueller. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8428. Switzerland: Springer, 2014b. P. 362–378. doi:110.1007/978-3-319-06251-8_22.

Krivulin N. Extremal Properties of Tropical Eigenvalues and Solutions to Tropical Optimization Problems. *Linear Algebra and Its Application*. 2015a. Vol. 468. P. 211–232. doi:10.1016/j.laa.2014.06.044.

Krivulin N. A Multidimensional Tropical Optimization Problem with Nonlinear Objective Function and Linear Constraints. *Optimization*. 2015b. Vol. 64. N 5. P. 1107–1129. In press. doi:10.1080/02331934.2013.840624.

Saaty T. L., Vargas L. G. Comparison of Eigenvalue, Logarithmic Least Squares and Least Squares Methods in Estimating Ratios. *Mathematical Modelling*. 1984. Vol. 5. N 5. P. 309–324.

Thurstone L. L. Attitudes Can Be Measured. *American Journal of Sociology*. 1928. Vol. 33. N 4. P. 529–554.

Thurstone L. L. The Measurement of Change in Social Attitude. *Journal of Social Psychology*. 1931. Vol. 2. P. 230–235.

Thurstone L. L., Chave E. J. *The Measurement of Attitude: A Psychophysical Method and Experiments with a Scale for Measuring Attitude Toward the Church*. 7th ed.. Chicago: University of Chicago Press, 1929.

Статья поступила в редакцию 12 ноября 2014 г.

Контактная информация

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, профессор; nkk@math.spbu.ru

Гладких Игорь Валентинович — кандидат экономических наук, доцент; gladkikh@gsom.pu.ru

Krivulin Nikolai K. — Doctor of Sciences in Mathematics, Professor; nkk@math.spbu.ru

Gladkikh Igor V. — Candidate of Sciences in Economics, Associate Professor; gladkikh@gsom.pu.ru