Вестник СПбГУ. Сер. 8. 2009. Вып. 1

Н. А. Зенкевич, А. В. Зятчин

МОДЕЛЬ ОЛИГОПОЛИИ ПРИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ С ПОЗИЦИЙ КОРПОРАТИВНОЙ СОЦИАЛЬНОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТИ

Целью настоящей статьи является определение направлений реализации региональной экологической политики предприятий с позиций корпоративной социальной ответственности. На основе исследования статической модели олигополии при заданных штрафах за загрязнение окружающей среды найдены стратегии поведения фирмы в условиях олигополии при соблюдении ограничений, диктуемых экологической политикой региона. Решена задача экологического дизайна, в которой определено поведение социального планировщика, реализующего принцип «загрязнитель платит» и использующего такую систему назначения размера штрафа, чтобы мотивировать предприятия не нарушать предельно допустимые уровни загрязнения. Построено кооперативное социально устойчивое решение модели олигополии, при котором суммарный выигрыш участников выше, чем в равновесии, а уровень загрязнения — ниже. Показано, что данное кооперативное решение является динамически устойчивым для дифференциальной модели олигополии со стохастической динамикой, т. е. кооперативное решение соответствует принципу устойчивого развития.

Ключевые слова: корпоративная социальная ответственность, региональная экологическая политика, устойчивое развитие, игра, равновесие по Нэшу, кооперативное решение, дифференциальная стохастическая игра, динамическая устойчивость кооперативного решения.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день не существует единой общепринятой трактовки и вследствие этого — единого понимания сущности корпоративной социальной ответственности (КСО) бизнеса. Поэтому на практике компании самостоятельно определяют свою концепцию КСО, ориентируясь на национальную специфику и особенности бизнеса. Вместе с тем, как убедительно показано в «Докладе о социальных инвестициях в России — 2008», с высокой степенью надежности можно утверждать, что под КСО понимается «философия поведения и концепция выстраивания деловым сообществом, компаниями и отдельными представителями бизнеса своей деятельности, направленной на удовлетворение ожиданий заинтересованных сторон в целях устойчивого развития» [Благов, 2008, с. 64]. Иными словами, речь идет об ответственности бизнеса перед обществом, причем для бизнеса это — осознанное решение. С этической точки зрения такая философия поведения понятна, а с экономической или практической стороны все не так прозрачно. Дело в том, что любая ответственная деятельность связана с дополнительными материальными и финансовыми затратами. В контексте КСО подразумеваются социальные инвестиции, при этом бизнес должен оставаться эффективным. Поэтому возникает естественный вопрос о том, имеются ли у бизнеса объективные экономические возможности и стимулы, которые приводят его представителей к пониманию и принятию философии КСО, или КСО — это удел успешных и богатых компаний? Если такие стимулы имеются, то каковы механизмы их реализации? Проблема представляется особенно актуальной сейчас, когда развитие отечественного бизнеса находится на стадии интеграции КСО в корпоративную стратегию, т. е. речь идет не столько о философской, сколько об управленческой проблеме. С методологической точки зрения — это основной вопрос, попытке ответить на который и посвящена настоящая статья.

В рамках эволюции концепции КСО рассматривают различные направления социальных инвестиций: развитие персонала, охрана здоровья и безопасные условия труда, добросовестная деловая практика в отношении потребителей и деловых партеров, местное сообщество, природоохранная деятельность и ресурсосбережение [Благов, 2008]. В контексте проведенного исследования нас в большей степени будут интересовать проблемы воздействия бизнеса на состояние окружающей среды. В широком смысле речь здесь идет о реализации государственной *экополитики* как системы политических, экономических, юридических, образовательных и иных мер, принимаемых для управления экологической ситуацией и обеспечения рационального использования природных ресурсов на территории страны. При этом под *окружающей средой* (environment) мы понимаем внешнюю среду, в которой функционирует *организация* (компания, объединение, фирма, предприятие независимо от формы собственности), включая воздух, воду, землю и природные ресурсы.

При разработке и реализации экологической политики можно выделить несколько уровней: *международный, государственный* (*национальный*), *региональный* и *локальный*. Элементами экологической политики являются: принципы, цели, приоритеты, субъекты, механизмы реализации (методы). При этом существуют различные подходы к определению методов экологической политики [Лопатин, 2001; Пахомова, Эндерс, Рихтер, 2003]: экономические — планирование природопользования, система платежей, налогообложения, льгот; законодательно-правовые — разработка и принятие нормативно-правовых актов; административно-контрольные — контроль за соблюдением природоохранного законодательства, экологический мониторинг. В настоящее время на всех уровнях регулирования большое внимание уделяется проблеме формирования и реализации экологической политики для отдельных организаций (локальный уровень), особенно промышленных предприятий, которые зачастую вносят основной вклад в загрязнение окружающей среды региона. При рассмотрении совместного воздействия предприятий на окружающую среду на территории их присутствия говорят о *региональной экологической политике* как о совокупности намерений и принципов в отношении экологических показателей. Здесь под целевым *экологическим показателем* (environmental objective) понимается общий целевой показатель состояния окружающей среды.

В настоящей работе рассматривается взаимодействие *заинтересованных сторон* экологической политики, таких как: акционеры и инвесторы, менеджмент организации (обеспечение эффективности производства, разработка *системы управления окружающей средой*, принципы КСО и их реализация в корпоративной стратегии); государство (взаимодействие с бизнесом по вопросам экополитики, регулирование и контроль состояния окружающей среды); местные сообщества (региональные органы власти, органы местного самоуправления, население территории присутствия); конкуренты; профильные международные организации. Основными действующими сторонами реализации экополитики являются государственные и региональные органы власти, с одной стороны, и организации (предприятия) — с другой стороны. Здесь под организацией понимается предприятие региона, чье производство связано с негативным *воздействием на окружающую среду*, где под последним понимается любое изменение в окружающей среде, полностью или частично являющееся результатом деятельности организации, ее продукции или услуг [Системы управления…, 1998].

В Российской Федерации взаимоотношения между действующими сторонами регулируются Федеральным Законом «Об охране окружающей среды» от 10 января 2002 г., № 7–ФЗ, федеральными и региональными законодательными актами. В настоящей работе орган государственной власти субъекта Российской Федерации в сфере отношений, связанных с охраной окружающей среды, будем называть *социальным планировщиком*. К полномочиям органов социального планировщика относятся: государственный контроль в области охраны окружающей среды (государственный экологический контроль); экономическая оценка воздействия на окружающую среду хозяйственной и иной деятельности; предъявление исков о возмещении вреда окружающей среде, причиненного в результате нарушения законодательства в области охраны окружающей среды.

Наряду с государственными и региональными органами власти, необходимо отметить деятельность некоммерческих организаций, таких как местные сообщества и профильные организации. Например, американская некоммерческая ассоциация Business for Social Responsibility требует от своих членов «в стремлении к коммерческому успеху на первое место ставить моральные ценности, уважать людей и общество, сохранять природу» [Porter, 2006]. Кроме того, негосударственные природоохранные организации способны через средства массовой информации вызвать резонанс в общественном мнении, при этом предприятие несет значительные финансовые затраты, связанные с восстановлением доверия потребителей. Природоохранные научно-исследовательские организации занимаются разработкой научно обоснованного инструментария формирования экополитики согласно концепции *устойчивого развития*. При этом ясно, что с точки зрения корпоративной социальной ответственности экологическая политика должна оказывать важную роль при разработке стратегии компании [Porter, 2006; Благов, 2006].

Целью настоящего исследования является определение направлений реализации экополитики предприятий на региональном уровне с позиции корпоративной социальной ответственности.

Перейдем к описательной постановке исходной задачи. Рассматривается регион, богатый полезными ископаемыми. Благодаря близости природных ресурсов, в регионе развивается олигополистическое производство: несколько фирм создали предприятия, производящие товары-заменители. Деятельность предприятий связана с негативным воздействием на окружающую среду, выражающемся в выбросах загрязняющих веществ в атмосферу (целевой экологический показатель). Определена предельно допустимая концентрация (ПДК) химических элементов и примесей в атмосфере. За превышение ПДК каждая фирма платит штраф, размер которого определен социальным планировщиком.

Производителям известна функция спроса на их товар. Предполагается, что эта функция линейно зависит от общего объема предложения. Целью каждой фирмы является максимизация прибыли. При этом необходимо определить границы, в которых деятельность каждого производителя можно оценить как социально-ответственную.

В данной постановке исследованы три проблемы. Первая проблема заключается в нахождении стратегии поведения фирмы в условиях олигополии при соблюдении ограничений, диктуемых экологической политикой региона. В дальнейшем эту задачу будем называть *статической моделью олигополии при заданных штрафах за загрязнение*. Вторая проблема сводится к определению поведения социального планировщика, который реализует принцип «загрязнитель платит» и использует определенную систему назначения размера штрафа, чтобы мотивировать предприятия не нарушать предельно допустимые уровни загрязнения. Эту проблему будем называть *задачей экологического дизайна*. Третья проблема заключается в определении такого *кооперативного решения*, при котором суммарный выигрыш участников больше, чем в равновесии, а уровень загрязнения — ниже. Показано, что данное кооперативное решение является динамически устойчивым для дифференциальной игры со стохастической динамикой, т. е. кооперативное решение соответствует принципу устойчивого развития [Благов, 2006]. Решение этой проблемы будем называть *кооперативным социально устойчивым решением*.

В работе построена функция минимального значения штрафа в каждом состоянии стохастического процесса, при котором игрокам безразлично, нарушать ПДК и платить штраф или снижать объемы производства. Отдельно исследован случай кооперативного поведения. Показано, что при кооперации игроки при меньшем объеме регионального выпуска получают большую региональную прибыль, чем при некооперативном поведении. Кроме того, вероятность превышения ПДК загрязняющих веществ в кооперативном случае ниже. В идейном плане полученный результат не противоречит основным принципам КСО. Так, М. Портер отмечает, что «если та или иная проблема, имеющая широкий общественный резонанс, затрагивает многие компании… то лучше всего их решать сообща, вырабатывая кооперативные решения» [Porter, Kramer, 2006].

В основе данного исследования лежит модель, которая впервые была опубликована в статье [Zenkevich, Zyatchin, 2007], где изучалась проблема защиты окружающей среды для частного случая с позиций государственного регулирования величины штрафов за загрязнение. В более ранних работах нами были исследованы модели олигополии со стохастически изменяющимся параметром [Зятчин, 2006; Zyatchin, Zenkevich, 2005]. В данной работе завершено исследование модели, найдено ее решение в случае некооперативного и кооперативного поведения участников, а также проводится сравнение результатов моделирования с позиций КСО.

Модели командно-административного управления (command-and-control approach) и механизмов рыночного регулирования (market-based approach) объемов выбросов загрязняющих веществ с позиций социального планировщика обсуждались в работе [Tietenberg, 2007]. В [Hatcher, 2007] проводится исследование оптимального выпуска фирмы при наличии штрафов за превышение допустимой концентрации загрязняющих веществ в условиях монополии. Во всех указанных выше работах математическая модель представляла собой задачу оптимального управления для одного предприятия.

Дифференциальные игры использовались при моделировании конкурентных процессов при ограничениях на объем загрязняющих веществ многими авторами: (см., напр.: [Dockner, Long, 1993; Kaitala, Pohjola, 1995; Jorgensen, Zaccour, 2001; Yeung, 2001; Petrosjan, Zaccour, 2003; Jorgensen, Martin-Herran, Zaccour, 2003]). Один из выводов указанных работ состоит в том, что при кооперативном поведении не только увеличивается совместный выигрыш участников, но и уменьшается уровень загрязнения. При этом здесь не обсуждаются экономические аспекты проблемы регионального производства при наличии штрафов за загрязнение.

В работах [Петросян, Захаров, 1996; Petrosjan, Zakharov, 1996], среди прочих, приведены модели загрязнения атмосферы, излагаются методы решения задач ограничения выбросов и оптимального размещения промышленных предприятий — источников выбросов, строится модель согласования интересов различных взаимодействующих сторон при использовании ограниченных природных ресурсов, предлагаются способы нормирования объемов расходования ресурсов, оптимизации штрафных санкций. В работе [Cabo, Escudero, Martin-Herran, 2006] исследовалась модель двух соседствующих регионов, один из которых является поставщиком полуфабрикатов для второго. В [Yeung, Petrosyan, 2006] приведено решение модели управления загрязнением окружающей среды, в которой учитывается динамика накопления и поглощения загрязняющих веществ. В этой модели исследована проблема динамической устойчивости кооперативного решения.

Статья имеет следующую структуру изложения материала. В первом разделе вербальная постановка задачи описывается в терминах математической теории игр. Во втором разделе приводится решение статической игры в смысле равновесия по Нэшу, при этом решается задача экологического дизайна: определяется минимальный размер штрафа в каждом состоянии процесса, при котором всем производителям выгодно снизить уровни производства. В третьем разделе исследуется кооперативное поведение фирм. В четвертом разделе проводятся анализ и сравнение результатов, полученных для случаев конкурентного и кооперативного поведения. В пятом разделе исследована повторяющаяся игра, формализующая задачу производства в условиях олигополии и ограничений на выброс загрязняющих веществ. В заключении подводятся итоги исследования. В приложениях приведены математические выкладки и доказательства теорем.

Промежуточные результаты работы апробированы на международных конференциях, нашли понимание участников и получили положительную оценку:

- 12-й симпозиум Международного общества динамических игр. Инрия-София Антиполис, 3–6 июля 2006 г.

- 7-е совещание по теории игр и ее практическому применению к энергетике, окружающей среде и природным ресурсам. Монреаль, Высшая коммерческая школа, 28–30 мая 2007 г.
- Динамические игры в исследованиях по менеджменту, 2-я Международная конференция по теории игр и приложениям (CMGTA'2007). Циндао, КНР, 17–19 сентября 2007 г.

СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЛИГОПОЛИИ ПРИ ЗАДАННЫХ ШТРАФАХ ЗА ЗАГРЯЗНЕНИЕ

Рассмотрим олигополию, в которой присутствуют n фирм. Предполагается, что фирмы выпускают однородный продукт, причем производство всех фирм расположено в некотором экологически значимом регионе Ω.

Пусть уровень ПДК загрязняющих веществ в регионе Ω определен и равен $\theta > 0$. Известно [Петросян, Захаров, 1996], что общее загрязнение атмосферы в регионе (негативное воздействие на окружающую среду при наличии n источников) может быть оценено по формуле:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} d_i \omega_i,$$

где ω_i — объем выбросов фирмы i, d_i — известные константы, определяемые эмпирическим путем.

Будем называть каждое предприятие $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ игроком. Для простоты рассмотрения сделаем следующие предположения:

1) предприятия имеют одинаковые удельные затраты c;
2) производственная технология каждого предприятия (игрока) такова, что объем выбросов ω_i игрока i пропорционален объему производимой продукции q_i [Hatcher, 2007; Петросян, Захаров, 1996]:

$$\omega_i = \beta_i q_i \text{ и } \omega = \sum_{i=1}^{n} d_i \omega_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \beta_i q_i. \tag{1}$$

Предположим, что $d_i = d$, $\beta_i = \beta$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = Q$, где Q — региональный выпуск. Пусть игрок i имеет возможность выбирать q_i из множества $q_i \in [0, \infty)$. Исследуем вариант олигополии по Курно при наличии ограничений, определяемых экологической политикой. Предположим, что административное регулирование негативного воздействия на окружающую среду со стороны производителей осуществляется посредством назначения штрафа: если в регионе Ω объем загрязняющих веществ превосходит ПДК, то каждому производителю i назначается штраф $s_i = s > 0$.

Будем считать, что рыночная цена p продукта определяется как произведение обратной функции спроса на величину $x > 0$ (например, текущий курс иностранной валюты):

$$p(Q, x) = D(Q)x,$$

где функция $D(Q)$ линейна по Q:

$$D(Q) = a - bQ.$$

Определим функцию мгновенного выигрыша игрока i при отсутствии штрафов:

$$g_i(x, q) = q_i((a - bQ)\,x - c),$$

где c — постоянные предельные затраты, $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

В зависимости от объемов выбросов, функция выигрыша игрока имеет вид:

$$K_i(q, x) = \begin{cases} g_i(q, x), & \omega \le \theta; \\ g_i(q, x) - s_i(x), & \omega > \theta. \end{cases} \quad (2)$$

В результате нами определен класс одношаговых игр в нормальной форме при наличии штрафов за нарушение ПДК загрязняющих веществ:

$$\Gamma(x) = \left\langle N, \{Q_i\}_{i=1,\,n}, \{K_i(x, q)\}_{i=1,\,n} \right\rangle, \; x > 0.$$

Набор стратегий $q = (q_1, \ldots, q_n)$ будем называть *ситуацией* в игре $\Gamma(x)$.

РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ

Для игры $\Gamma(x)$, $x > 0$ справедливы следующие теоремы (доказательства теорем приведены в Приложении 2).

Теорема 1. *При* $s_i(x) \equiv 0$ *и* $x > c/a = A_1$ *в игре* $\Gamma(x)$, $x > 0$ *равновесие по Нэшу имеет вид:* $q^* = \left(q_1^*, \ldots, q_n^*\right)$, *где* $q^* = \dfrac{ax - c}{(n+1)xb}$.

Другими словами, если нет штрафов, то в модели олигополии имеет место единственное равновесие, определенное в теореме 1.

Обозначим $Q^* = \sum_{i=1}^{n} q_i^*$. Исследуем зависимость полученного решения от ограничений на размер выбросов.

Случай 1. Определим условия, при которых в ситуации $q^*(x)$ суммарный объем выбросов не превосходит ПДК (рис. 1*a*):

$$\theta \ge \sum_{i=1}^{n} d\beta q_i^* = \sum_{i=1}^{n} d\beta \left(\frac{a}{b(n+1)} - \frac{c}{b(n+1)x} \right) = \frac{a\sum\limits_{i=1}^{n} d\beta}{b(n+1)} - \frac{c\sum\limits_{i=1}^{n} d\beta}{b(n+1)x},$$

отсюда:

$$\left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{cd\beta}{ad\beta - \dfrac{(n+1)}{n}\theta b} = A_2, \text{ если } ad\beta - \dfrac{(n+1)}{n}\theta b > 0; \\ x \text{ — любое, если } ad\beta - \dfrac{(n+1)}{n}\theta b < 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Лемма. *Если* $ad\beta - (n+1)\theta b/n < 0$, *то при любой функции штрафа* $s_i(x) \geq 0$ *и* $x > c/a = A_1$ *в игре* $\Gamma(x)$ *существует равновесие по Нэшу.*

Доказательство. Если выполнено неравенство $ad\beta - \dfrac{(n+1)}{n}\theta b < 0$, то из (3) следует, что в ситуации q^* суммарный объем выбросов $\sum_{i=1}^{n} d\beta q_i^* \leq \theta$. Следовательно, $K_i(q, x) = g_i(q, x)$. По теореме 1 в игре $\Gamma(x)$ существует равновесие по Нэшу. Лемма доказана.

Случай 2. Предположим, что негативное воздействие на окружающую среду загрязняющими веществами превышает ПДК в ситуации $q^*(x) = \left(q_1^*(x), \ldots, q_n^*(x)\right)$ и $\omega^* = \sum_{i=1}^{n} d\omega_i^* = \sum_{i=1}^{n} d\beta q_i^* > \theta$. В этом случае каждому игроку назначается штраф в размере s_i. Это означает, что игроки стоят перед выбором: либо поддерживать ситуацию q^* и выплачивать штраф, либо уменьшить объемы производства, чтобы негативное воздействие на окружающую среду находилось на уровне θ.

Рассмотрим выигрыш игрока как функцию от предельно допустимой концентрации загрязняющих веществ:

$$\tilde{g}_i(\omega, x) = g_i\left(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n, x\right).$$

Из условия (1) следует, что функция $\tilde{g}_i$ является вогнутой по $\omega \geq 0$, $i \in I$.

Рассмотрим гиперплоскость:

$$\sum_{i=1}^{n} d\omega_i^{**} = \sum_{i=1}^{n} d\beta q_i^{**} = \theta.$$

Предположим, что размер штрафа за загрязнение определен таким образом, что для любого игрока i при $\omega^* > \theta$ выполнено неравенство (рис. 1*b*):

$$\tilde{g}_i(\omega^{**}, x) \leq \tilde{g}_i(\omega^*, x). \tag{4}$$

Другими словами, с точки зрения прибыли у игроков нет стимула снижать объем производства: платить штраф — выгодно.

Если неравенство (4) не выполнено, рассмотрим задачу условной максимизации: определить такие значения q_i^{**} и $\omega_i^{**} = bq_i^{**}$, чтобы игроки получали максимально возможный выигрыш, находясь на уровне ПДК, т. е.:

$$q_i^{**} = \arg\max_{q_i} q_i\left[(a - bQ)x - c\right]$$

при условии, что:

$$\omega^{**} = \sum_{i=1}^{n} d\beta q_i^{**} = \theta.$$

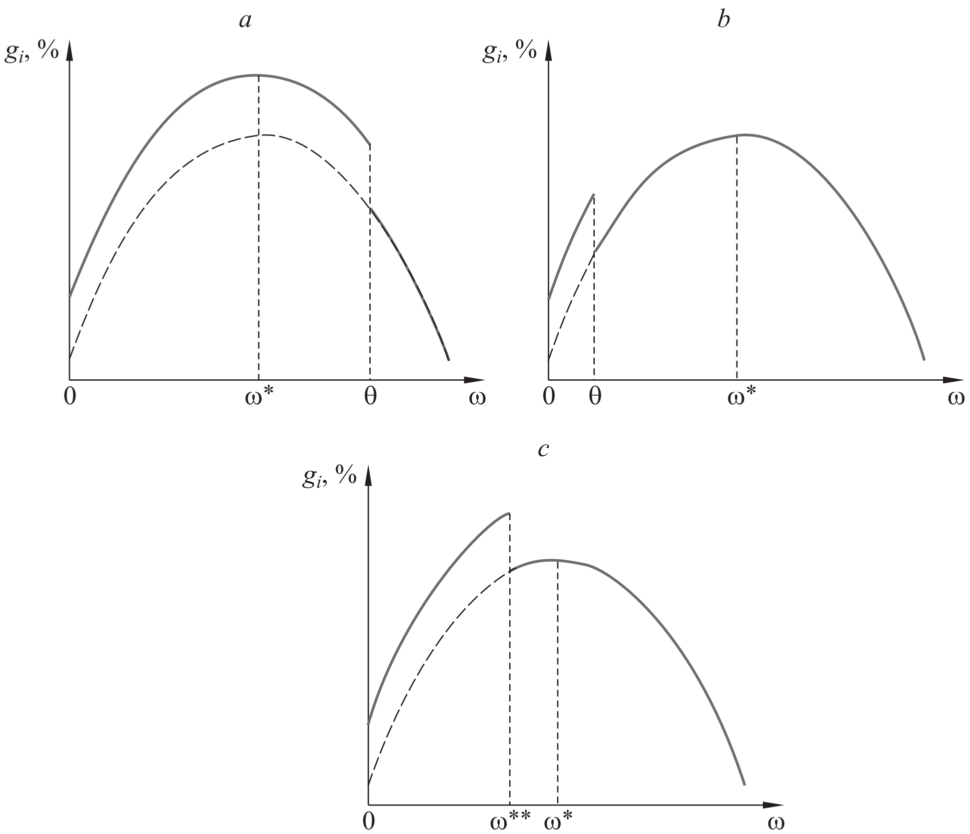

Рис. 1. Зависимость выигрыша игрока *i* от объемов выбросов

Решение задачи проиллюстрировано на рис. 1*c*. Для нахождения решения задачи рассмотрим условие первого порядка:

$$\begin{cases} (a - bQ)x - bxq_i + \lambda_i d\beta - c = 0,\ i \in I; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} d\beta q_i = \theta. \end{cases} \tag{5}$$

Решая (5), находим набор стратегий $q^{**}(x) = \left(q_1^{**}(x), \ldots, q_n^{**}(x)\right)$,

где $q_i^{**}(x) = \dfrac{\theta}{nd\beta}$,

при этом выигрыш игрока i имеет вид:

$$g_i\left(q_1^{**}, \ldots, q_n^{**}, x\right) = \left(\frac{a\theta}{nd\beta} - \frac{\theta^2 b}{nd^2\beta^2}\right)x - \frac{c\theta}{nd\beta}.$$

Рассмотрим мгновенный выигрыш игрока (2) как функцию от x:

$$K_i^* = K_i\left(q_1^*, \ldots, q_n^*, x\right) = \begin{cases} k_1^* x + \dfrac{k_2^*}{x} + k_3^*, & \omega^* \le \theta \ (a); \\ k_1^* x + \dfrac{k_2^*}{x} + k_3^* - s_i(x), & \omega^* > \theta \ (b), \end{cases}$$

$$g_i^{**} = g_i\left(q_1^{**}, \ldots, q_n^{**}, x\right) = \left(\frac{a\theta}{nd\beta} - \frac{\theta^2 b}{nd^2\beta^2}\right)x - \frac{c\theta}{nd\beta}, \ \omega^{**} = \theta \ (\mathrm{c}),$$

где $k_1^* = \dfrac{1}{b}l^2,\ k_2^* = \dfrac{1}{b}m^2,\ k_3^* = \dfrac{1}{b}2lm,\ l = \dfrac{a}{(n+1)},\ m_i = -\dfrac{c}{(n+1)}.$

Заметим, что функция $g_i\left(q_1^{**}, \ldots, q_n^{**}, x\right)$ является линейной по переменной x. Будем искать функцию $s_i(x)$ в виде:

$$s_i(x) = \max_{q_i} g_i\left(q_1^{**}, \ldots, q_{i-1}^{**}, q_i, q_{i+1}^{**}, \ldots, q_n^{**}\right) - g_i\left(q^{**}\right).$$

Тогда:

$$s_i(x) = \max_{q_i} q_i\left[ax - b\left(q_i + (n-1)\frac{\theta}{nd\beta}\right)x - c\right] - \left(\frac{a\theta}{nd\beta} - \frac{\theta^2 b}{nd^2\beta^2}\right)x + \frac{ca\theta}{nd\beta} =$$

$$= \left[\frac{a^2}{4b} - \frac{a\theta(n-1)}{2nd\beta} + \frac{((n-1)^2 + nb)\theta}{n^2d^2\beta^2}\right]x + \frac{c^2}{4b}\frac{1}{x} + \left[\frac{\theta c(n-1+4a)}{nd\beta} - \frac{ac}{4b}\right] \equiv \tag{6}$$

$$\equiv \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{1}{x} + \alpha_3.$$

Другими словами, построена такая функция штрафов, при которой одиночное отклонение любого игрока от ситуации, в которой общее негативное воздействие на окружающую среду не превосходит ПДК, экономически не выгодно, поскольку $g_i(q^{**}) \ge g_i(q_i^{**} \parallel q_i) - s_i(x)$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если функция штрафа $s_i(x)$ имеет вид (6), то в игре $\Gamma(x)$, $x > 0$ существует равновесие по Нэшу.*

Следствие. Если функция $s_i(x)$ имеет вид (6), то в игре $\Gamma(x)$, $x > 0$ существует равновесие по Нэшу следующего вида:

при $ad\beta - \dfrac{(n+1)}{n}\theta b > 0$

$$q_i^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < x \le A_1; \\ \dfrac{ax - c}{(n+1)xb} \text{ при } A_1 < x \le A_2; \\ \dfrac{\theta}{ndb} \text{ при } A_2 \le x, \end{cases}$$

при $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b \leq 0$

$$q_i^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < x \leq A_1; \\ \dfrac{ax - c}{(n+1)xb} \text{ при } A_1 < x, \end{cases}$$

где $A_1 = \frac{c}{a}$, $A_2 = \dfrac{cd\beta}{ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b}$.

На рис. 2 изображен график функции выигрыша игрока в зависимости от значения x.

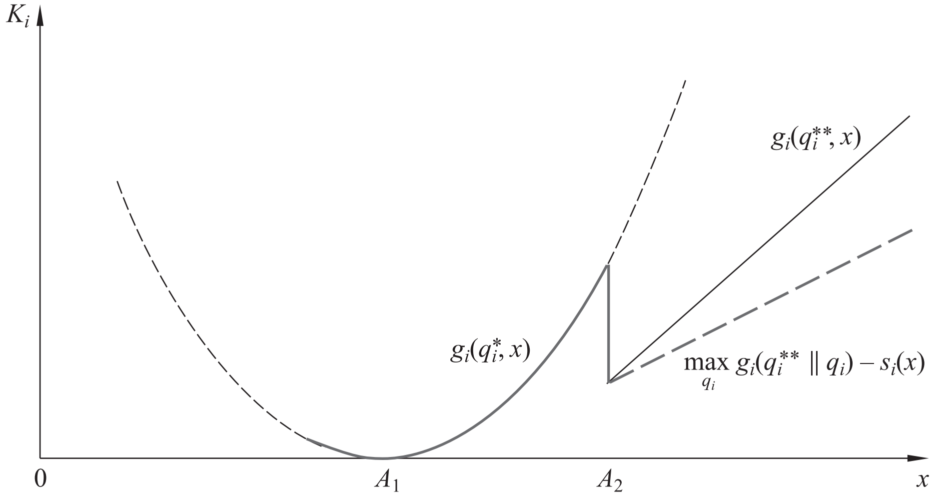

Рис. 2. Выигрыш игрока i в равновесии

Данный рисунок подытоживает предыдущие рассуждения.

КООПЕРАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

На основе одношаговой игры $\Gamma(x) = \left\langle N, \{Q_i\}_{i=1,n}, \{K_i(q,x)\}_{i=1,n} \right\rangle$, $x > 0$ формализуем задачу производства в условиях олигополии и ограничений на выброс загрязняющих веществ в рамках кооперативного поведения с целью получения максимального суммарного выигрыша.

Для этого рассмотрим игру $\overline{\Gamma}(N, V(S,x))$ в форме характеристической функции [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998]. Характеристическая функция $V(S, x)$ определяется как значение антагонистической игры $\Gamma_{S, N/S}$, построенной на структуре игры $\Gamma(x)$, разыгрываемой между коалицией S (максимизирующим игроком) и дополнительной коалицией N/S (минимизирующим игроком).

Традиционно функция выигрыша коалиции S определяется как сумма выигрышей ее участников. Значение характеристической функции имеет вид:

$$V(S, x) = \max_{q_S} \min_{q_{N/S}} K_S(q(x(\tau)), x(\tau)),$$

где $K_S(q(x(\tau)), x(\tau)) = \sum_{i \in S} K_i(q(x(\tau)), x(\tau))$. Заметим, что в этом случае:

$$K_N(q, x) = \sum_{i=1}^{n} K_i =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} q_i((a - bQ)x - c) = Q((a - bQ)x - c), & \omega < 0; \\ \sum_{i=1}^{n} q_i((a - bQ)x - c - s_i(x)) = Q((a - bQ)x - c) - S_N(x), & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Определим функцию $g_N(Q, x) = Q((a - bQ)x - c)$. Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial Q}(Q((a - bQ)x - c)) = ax - 2bQx - c.$$

Следовательно,

$$Q^{***} = \frac{ax - c}{2bx}. \tag{7}$$

Условие второго порядка имеет вид: $\frac{\partial^2}{\partial Q^2}(Q((a - bQ)x - c)) = -2bx$, где $x > 0$ и $b > 0$. Таким образом, функция $g_N(q, x)$ является вогнутой по Q. Поскольку игра симметричная, то объем производства каждого участника коалиции составляет $q_i^{***} = \frac{ax - c}{2bxn}$. При этом выигрыш максимальной коалиции равен $g_N^{***} = \frac{(ax - c)^2}{4bx}$.

Непосредственно проверяем, что $q_i^{***} < q_i^*$, $g^{***} \geq \sum_{i=1}^{N} g_i^*$ и $p(Q^{***}, x) > p(Q^*, x)$ для любого значения x. Другими словами, если игроки решают объединиться, то при меньших объемах производства они получают больший суммарный выигрыш, при этом рыночная цена продукта увеличивается. Рассмотрим еще два случая.

Случай 1. Определим значения параметра x, при которых игроки не нарушают ПДК в ситуации $q^{***} = (q_1^{***}, \dots, q_n^{***})$:

$$\theta \geq \sum_{i=1}^{n} d\beta q_i^{***} = d\beta \sum_{i=1}^{n} \frac{ax - c}{2bxn} = d\beta \frac{a}{2b} - d\beta \frac{c}{2bx}.$$

Решая последнее неравенство, имеем:

$$\left[\begin{array}{ll} x \le \dfrac{d\beta c}{ad\beta - 2\theta b} = A_3, & \text{если } ad\beta - 2\theta b > 0; \\ x \text{ — любое}, & \text{если } ad\beta - 2\theta b < 0. \end{array}\right.$$

Случай 2. Предположим, что концентрация загрязняющих веществ превышает ПДК при кооперативном поведении: $\omega^{***} = \sum_{i=1}^{n} d\omega_i^{***} = \sum_{i=1}^{n} d\beta q_i^{***} > \theta$. По аналогии с рассуждениями в предыдущем разделе рассмотрим задачу условной максимизации:

$$\begin{cases} \max\limits_{Q}(Q(a - bQ)x - c); \\ \sum\limits_{i=1}^{n} d\beta q_i = \theta. \end{cases} \tag{8}$$

Решение задачи (8) совпадает с решением задачи условной максимизации (5): $q_i^{**}(x) = \dfrac{\theta}{nd\beta}$, поэтому $Q^{**} = \dfrac{\theta}{d\beta}$.

Рассмотрим мгновенный выигрыш максимальной коалиции K_N^{***} как функцию от x:

$$K_i^{***} = K_i(q_1^{***}, \dots, q_n^{***}, x) = \begin{cases} k_1^{***}x + \dfrac{k_2^{***}}{x} + k_3^{***}, & \omega^{***} \le \theta; \\ k_1^{***}x + \dfrac{k_2^{***}}{x} + k_3^{***} - S_N(x), & \omega^{***} > \theta, \end{cases}$$

$$g_i^{**} = g_i(q_1^{**}, \dots, q_n^{**}, x) = \left(\frac{a\theta}{nd\beta} - \frac{\theta^2 b}{nd^2\beta^2}\right)x - \frac{c\theta}{nd\beta}, \ \omega^{***} = \theta,$$

где $k_1^{***} = \dfrac{a^2}{4b}$, $k_2^{***} = \dfrac{c^2}{4b}$, $k_3^{***} = -\dfrac{2ac}{4b}$, $S_N(x)$ — размер суммарного штрафа, накладываемого на всех производителей региона Ω.

Будем искать функцию $S_N(x)$ в виде $S_N(x) = g_N(q^{***}, x) - g_N(q^{**}, x)$:

$$S_N(x) = \left(\frac{a^2}{4b}x + \frac{c^2}{4b}\frac{1}{x} - \frac{2ac}{4b}\right) - \left(\frac{a\theta}{d\beta} - \frac{b\theta^2}{d^2\beta^2}\right)x + \frac{\theta}{d\beta}c =$$

$$= \left(\frac{a^2}{4b} - \frac{a\theta}{d\beta} + \frac{b\theta^2}{d^2\beta^2}\right)x + \frac{c^2}{4b}\frac{1}{x} + \left(\frac{\theta c}{d\beta} - \frac{2ac}{4b}\right).$$

Исходя из симметрии предполагаем, что все производители платят одинаковые штрафы:

$$S_i(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{4b} - \frac{a\theta}{d\beta} + \frac{b\theta^2}{d^2\beta^2}\right)x + \frac{1}{n}\frac{c^2}{4b}\frac{1}{x} + \frac{1}{n}\left(\frac{\theta c}{d\beta} - \frac{2ac}{4b}\right) \equiv$$

$$\equiv \beta_1 x + \beta_2 \frac{1}{x} + \beta_3.$$

Иными словами, штраф $S_i(x)$ сдерживает коллективное отклонение от ситуации, в которой суммарный объем загрязняющих веществ не превосходит ПДК.

КОРПОРАТИВНОЕ СОЦИАЛЬНО УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ

В настоящем разделе сравниваются результаты, полученные для кооперативного и некооперативного поведения для статической игры. Подытоживая приведенные результаты моделирования, можно сделать следующие выводы.

1. Для случаев конкуренции и кооперации при значениях параметра $x \in (0, A_1)$, где $A_1 = a/c$, производство в регионе Ω нерентабельно.
2. При $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b < 0$ в случае конкуренции и при $ad\beta - 2\theta b < 0$ в случае кооперации при любых значениях $x \in [A_1, \infty)$ производство экономически выгодно. Поэтому кооперативное поведение является корпоративным социально устойчивым. В противном случае корпоративная социальная устойчивость сохраняется лишь на отрезке $[A_1, A_3]$, где $A_3 = \frac{d\beta c}{ad\beta - 2\theta b}$. При этом даже при отсутствии регулирования со стороны социального планировщика кооперативное поведение более эффективно с точки зрения прибыли и защиты окружающей среды, чем некооперативное.
3. В случае как кооперации, так и конкуренции, согласно построенной системе штрафов, при нарушении ПДК производители вынуждены уменьшать количество выбросов посредством снижения производства. В модели предполагается, что рыночная цена продукта является убывающей функцией по объему предложения. В итоге при решении задачи защиты окружающей среды появляется новая проблема, связанная с ростом цен на продукцию и потерей конкурентных преимуществ производителей региона Ω. Согласно (1), альтернативным подходом к снижению объемов выбросов является регулирование параметра пропорциональности производства объему выбросов, β. Для случая конкуренции вновь рассмотрим неравенство $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b < 0$. Из него следует, что при $\beta < \frac{(n+1)}{n}\frac{\theta b}{ad} = B_1$

игроки придерживаются ситуации равновесия без нарушения ПДК при любом значении параметра x. При кооперации $\beta < 2\frac{\theta b}{ad} = B_2$. Очевидно, что $B_1 < B_2$ при $n \geq 2$. Следовательно, в условиях конкуренции игроки вынуждены проводить более тщательные работы по очистке собственных выбросов, чем при кооперации. Однако в последнем случае игроки имеют большую прибыль. Поэтому часть прибыли может быть направлена на улучшение технологии очистки выбросов как социальные инвестиции.

4. Изобразим значения выигрышей игроков, полученные выше, в зависимости от значения параметра x (рис. 3).

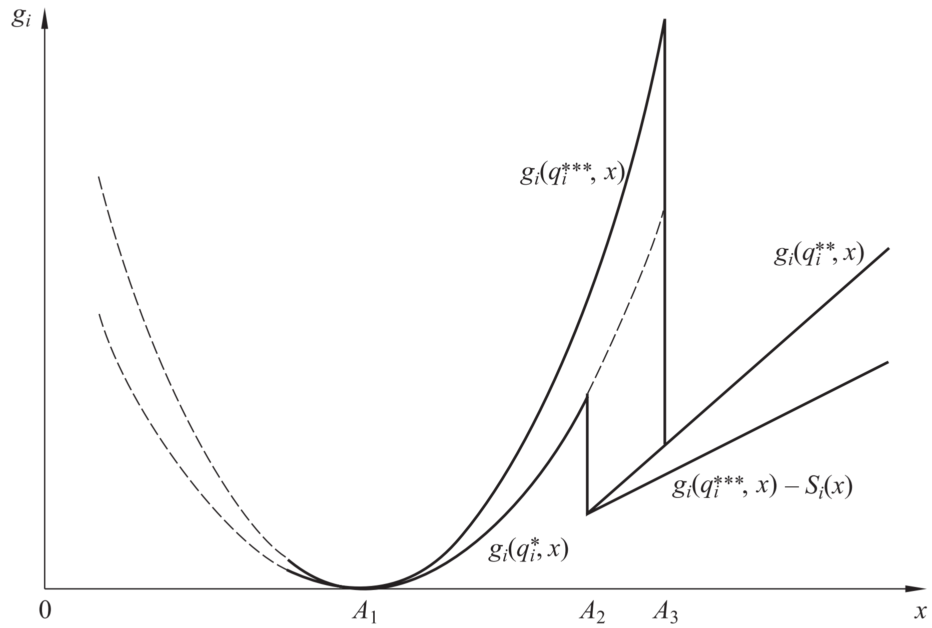

Рис. 3. Функция выигрыша игрока

В случае некооперативного поведения функция штрафа $s_i(x)$ построена так, что каждому игроку в одиночку невыгодно отклонятся от ситуации, в которой предприятия работают на уровне ПДК, реализуя равновесие по Нэшу.

В условиях кооперативного поведения функция штрафа $S_i(x)$ определена таким образом, что коллективное отклонение от описанной выше ситуации экономически не выгодно при любом значении x.

Построим функцию универсального штрафа, обладающую свойствами $s_i(x)$ и $S_i(x)$: $\overline{s}_i(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 \frac{1}{x} + \gamma_3$, где $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Иными словами, величина штрафа $\overline{s}_i(x)$ сдерживает как индивидуальное, так и коллективное отклонение от ситуации, в которой негативное воздействие на окружающую среду не превышает ПДК. В таком случае говорят, что ситуация $q^{**}(x)$ обладает свойством как индивидуальной, так и коллективной рациональности. Это и есть решение задачи экологического дизайна.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЛИГОПОЛИИ И КОРПОРАТИВНОЕ СОЦИАЛЬНО УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ

В данном разделе будем предполагать, что игроки решают задачу первого раздела в каждый момент времени $t \geq 0$. Покажем, что кооперативное решение статической модели дает решение ниже приведенной стохастической дифференциальной игры, при этом данное решение является динамически устойчивым, а поэтому корпоративно социально устойчивым, т. е. устойчивым с точки зрения устойчивого развития.

Рассмотрим дифференциальную игру $G(t_0, x_0)$ (и подыгры $G(t, x(t))$, $t \geq 0$), где при всех $t \geq 0$ имеет место повторяющаяся игра $\Gamma(x) = \left\langle N, \{Q_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{K_i(q,x)\}_{i=\overline{1,n}} \right\rangle$, $x > 0$, с множеством игроков $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$, их стратегиями $q_i(x) \in Q_i$, $i \in I$.

Пусть стохастическая динамика игры $G(t_0, x_0)$ имеет вид:

$$dx(\tau) = f(x(\tau))d\tau + \sigma(x(\tau))dz(\tau),\ x(t_0) = x_0. \qquad (9)$$

Здесь $z(\tau)$ — состояние стандартного винеровского процесса, $x(\tau) \in R$ — переменная состояния игры, $q_i(\tau)$ — управление игрока i в момент времени τ, $q_i \in Q_i \subset R$. В Приложении 1 приведены свойства процесса (9), рассмотрен пример.

Функция выигрыша игрока i в игре $G(t_0, x_0)$ при отсутствии штрафов имеет вид:

$$J_i(x_0, q_i^*, q_{-i}) = \max_{q_i} E\int_{t_0}^{\infty} e^{-r\tau} g_i\big(x(\tau), q(x(\tau))\big)d\tau, \qquad (10)$$

где $q(x(\tau)) = \big(q_1(x(\tau)), \ldots, q_n(x(\tau))\big)$ — набор стратегий игроков в игре $G(x(\tau))$, $g_i(x,q) = q_i\big((a - bQ)x - c\big)$. Обратим внимание, что терминальный выигрыш игрока i равен 0.

В дальнейшем анализе будем использовать метод динамического программирования. Функция Беллмана–Флеминга для игры (9)–(10) имеет вид [Флеминг, Ришел, 1978]:

$$J_i(x_0, q_i^*, q_{-i}) = \\ = \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r} g_i(x_0, q)\right\} + \frac{1}{r}\left(\mu J_i'(x, q_i^*, q_{-i}) + \frac{1}{2}\sigma^2 J_i''(x, q_i^*, q_{-i})\right). \qquad (11)$$

Предположим, что игроки выплачивают штраф при любом $x > 0$. Функция выигрыша игрока в игре $G(t_0, x_0)$ примет вид:

$$\bar{J}_i(x_0, q_i^*, q_{-i}) = \max_{q_i} E\int_{t_0}^{\infty} e^{-r\tau} g_i\left(x(\tau), q\left(x(\tau)\right) - s_i(x)\right) d\tau. \qquad (12)$$

Функция Беллмана–Флеминга для $\bar{J}_i(x_0, q_i^*, q_{-i})$:

$$\bar{J}_i(x_0, q_i^*, q_{-i}) = \\ = \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r}\left(g_i(x_0, q) - s_i(x)\right)\right\} + \frac{1}{r}\left(\mu \bar{J}_i'\left(x, q_i^*, q_{-i}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 \bar{J}_{ii}''\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)\right). \qquad (13)$$

Из (11) и (13) следует, что проблема максимизации значения функционалов (10) и (12) сводится к решению одношаговой игры $\Gamma(x) = \left\langle N, \{Q_i\}_{i=1,n}, \{K_i(q, x)\}_{i=1,n}\right\rangle$, $x > 0$.

Остановимся на кооперативном случае. Для каждой игры $G(t_0, x_0)$ рассмотрим игру $\tilde{G}(N, V(S, x(t))$ в форме характеристической функции [Petrosjan, Zenkevich, 1996]. Характеристическая функция $V(x, S)$ определяется как значение игры с нулевой суммой $G_{S,\ N/S}$, построенной на структуре игры $G(t_0, x_0)$, разыгрываемой между коалицией S —максимизирующим игроком и коалицией N/S — минимизирующим игроком.

Функция выигрыша коалиции S определяется как сумма выигрышей ее участников:

$$V(t_0, x_0, S) = \max_{q_S} \min_{q_{N/S}} E\int_{t_0}^{T} e^{-r\tau} g_S\left(x(\tau), q\left(x(\tau)\right)\right) d\tau.$$

Значение характеристической функции для максимальной коалиции в игре без штрафов принимает вид:

$$V(x_0, N) = \max_{q_N} E\int_{t_0}^{\infty} e^{-r\tau} \sum_{i=1}^{N} g_S\left(x(\tau), q\left(x(\tau)\right)\right) d\tau = \\ = \max_{Q} E\int_{t_0}^{\infty} e^{-r\tau} Q((a - bQ)x - c) d\tau. \qquad (14)$$

Повторяя приведенные для некооперативного случая рассуждения, получаем уравнение:

$$V(x_0, N) = \\ = \max_{Q}\left\{\frac{1}{r} Q((a - bQ)x - c)\right\} + \frac{1}{r}\left(\mu V'(x_0, N) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x_0, N)\right). \qquad (15)$$

Характеристическая функция для максимальной коалиции в игре со штрафами имеет вид:

$$\bar{V}(x_0, N) = \max_{q_N} E\int_{t_0}^{\infty} e^{-r\tau}\left[\sum_{i=1}^{N} g_S\left(x(\tau), q\left(x(\tau)\right)\right) - \sum_{i=1}^{N} S_i(x)\right] d\tau =$$
$$= \max_{Q} E\int_{t_0}^{\infty} e^{-r\tau}\left[Q\left((a-bQ)x-c\right)-S_N(x)\right]d\tau. \tag{16}$$

Очевидно, что уравнение (14) принимает вид:

$$\bar{V}(x_0, N) = \max_{Q}\left\{\frac{1}{r}Q((a-bQ)x-c)\right\} + \frac{1}{r}\left(\mu\bar{V}'(x_0, N) + \frac{1}{2}\sigma^2\bar{V}''(x_0, N)\right).$$

Из (15) и (17) следует, что проблема максимизации значения функционала (14) и (16) сводится к решению одношаговой игры $\bar{\Gamma}(N, V(S, x))$. Таким образом, игроки используют так называемое *близорукое поведение*, проводя максимизацию выигрыша в каждый момент времени, руководствуясь лишь информацией о текущем значении x, при этом по построению решение является динамически устойчивым [Петросян, 1977; Петросян, Кузютин, 2000; Зенкевич, Петросян, 2007]. Следовательно, в дифференциальной игре $G(t_0, x_0)$ все результаты четвертого раздела остаются в силе. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если в игре $G(0, x_0)$ выполнены неравенства $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b > 0$ и $2\mu - \sigma^2 > 0$, то вероятность того, что состояние процесса (9) попадает в интервал $[A_2, \infty)$ монотонно возрастает при $t \to \infty$. Если в игре $G(0, x_0)$ $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b < 0$ и $2\mu - \sigma^2 > 0$, то вероятность попадания состояния процесса в интервал $(0, A_1]$ монотонно возрастает при $t \to \infty$.

Утверждение 2. Если в игре $\tilde{G}(N, V(S, x(t)))$ выполнены неравенства $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b > 0$ и $2\mu - \sigma^2 > 0$, то вероятность попадания состояния процесса (9) в интервал $[A_3, \infty)$ монотонно возрастает при $t \to \infty$. Если в игре $\tilde{G}(N, V(S, x(t)))$ $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b < 0$ и $2\mu - \sigma^2 > 0$, то вероятность попадания состояния процесса (9) в интервал $(0, A_1]$ монотонно возрастает при $t \to \infty$.

Таким образом, в зависимости от соотношения параметров стохастического процесса (9) в будущем ожидается либо рост производства в регионе Ω, либо его спад. В первом случае необходимо вести постоянный мониторинг состояния процесса (9) для определения величины штрафа.

ВЫВОДЫ

Результаты работы показывают, что решения, принимаемые социальным планировщиком и производителями, в значительной степени зависят от параметров, характеризующих спрос, удельные выбросы предприятий и предельно допустимую концентрацию выбросов в атмосферу. Например, может оказаться, что ни в равновесии по Нэшу, ни при кооперативном поведении предельно допустимая концентрация загрязняющих веществ не будет превышена. Основным результатом проведенного исследования, на наш взгляд, является решение модели олигополии при экологических ограничениях с позиции КСО. Тем самым формируется социально ответственное поведение, не противоречащее основной функции бизнеса — получению прибыли (как ответ на критику Т. Левитта [Levitt, 1958] исходного определения КСО, предложенного Г. Боуэном [Bowen, 1953]). Кроме того, полученная стратегия поведения является шагом к реализации концепции корпоративной устойчивости, которая переводит концепцию устойчивого развития на язык практического менеджмента, превращаясь в «модель управления корпорацией, охватывающую экономическую, социальную и экологическую деятельность корпорации» [Steurer, Langer, Konrad, 2005].

Для реализации поставленных целей исследования разработаны и решены математические модели олигополии при экологических ограничениях. Для рассматриваемых моделей выполнены следующие задачи:

- осуществлена максимизация прибыли предприятий в условиях конкуренции (для статической модели найдено равновесие по Нэшу при заданных штрафах за загрязнение);
- рассчитаны уровни штрафов, при которых в равновесии предприятия не выходят за предельный уровень загрязнения (дизайн статической модели);
- построено кооперативное решение статической задачи, соответствующее принципам КСО;
- показано, что полученное кооперативное решение будет динамически устойчивым, т. е. соответствует принципу устойчивого развития.

Рекомендации. В завершение проведенного исследования можно сделать следующие рекомендации.

Предприятию:

1. При индивидуальной реализации экополитики предприятию предлагается использовать построенное некооперативное решение в условиях региональной конкуренции при экологических ограничениях.
2. При достаточно широком диапазоне параметров модели предприятиям региона рекомендуется применять кооперативное решение,

которое является экономически выгодным (по критерию прибыли) по сравнению с конкурентным поведением, при этом общий выброс в атмосферу будет ниже ПДК. Определены интервалы значений параметра x, при которых конкурентное и кооперативное поведение не вызывает нарушения ПДК загрязняющих веществ, при этом интервал, соответствующий кооперативному поведению, оказался шире. Кооперативное решение обладает свойствами корпоративной социальной устойчивости (КСУ) и устойчивого развития. Данное решение может рассматриваться как основа для социальных инвестиций предприятия в соответствии с его принципами КСО, включая проблемы улучшения технологии очистки выбросов в атмосферу и другие природоохранные мероприятия. Величина и возможность социальных инвестиций зависят от состояния и параметров процесса. Возможны неблагоприятные случаи, когда на эффективные природоохранные мероприятия требуются дотации.

3. Для реализация такой кооперативной социально устойчивой стратегии предприятию целесообразно вступить в отношения горизонтальной кооперации с другими конкурирующими производителями региона.
4. Предприятие должно заниматься мониторингом состояния атмосферы в регионе.

При реализации КСУ-стратегии мониторинг выгодно организовать на кооперативной основе.

Органам государственной и региональной власти (социальному планировщику):

1. Для регулирования состояния окружающей среды социальному планировщику целесообразно использовать функцию минимального значения размера штрафа $\overline{s}_i(x)$, которая позволяет государственным органам на законодательном уровне управлять решением предприятий региона об объемах выбросов загрязняющих веществ в пределах ПДК. Другими словами, решение задачи экологического дизайна может быть использовано в качестве основы для вычисления размера экологического штрафа. Особенность полученной шкалы заключается в том, что она поддерживается сильным равновесием как при кооперативном, так и при некооперативном поведении предприятий [Petrosyan, Grauer, 2004].
2. Поскольку прописать в законодательных актах правило $\overline{s}_i(x)$ затруднительно, вследствие нелинейной зависимости размера штрафа от параметра x предлагается следующая практическая схема определения экологических штрафов для социального планировщика. Рас-

смотрим ступенчатую схему определения размера штрафа (рис. 4): разобьем область определения функции (9), $(0, \infty)$, на интервалы $(0, A_1]$, $(0, A_2]$, …, $(0, A_n]$, тогда

$$s = \begin{cases} s(A_1), & x \in (0, A_1]; \\ s(A_2), & x \in (0, A_2]; \\ \dots \end{cases}$$

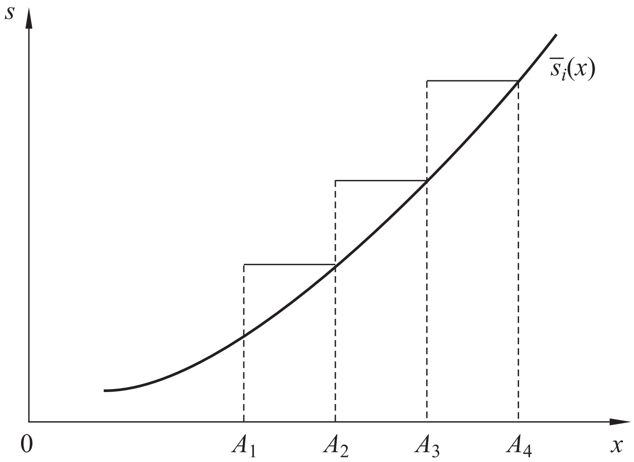

Рис. 4. Ступенчатая функция штрафов

Иными словами, определяются интервалы значений x, при которых размер штрафа остается постоянным. Для использования такой шкалы необходимы мониторинг и прогнозирование изменения параметра x со стороны социального планировщика.

Местным организациям:

Необходим мониторинг состояния атмосферы, в отдельных случаях — выход с законодательными инициативами по изменению шкалы экологических штрафов (в зависимости от состояния процесса). Требуется участие в выработке принципов КСО предприятий и в процессе их реализации, а также в контроле эффективности социальных инвестиций и дотаций предприятий.

Свойства геометрического броуновского движения

Предположим, что $x(t) \geq 0$ является переменной, характеризующей динамику игры, которая эволюционирует согласно стохастическому процессу (геометрическому броуновскому движению):

$$dx(t) = \mu x dt + \sigma x dz,\ x(0) = x_0, \tag{9}$$

где z — обобщенное броуновское движение [Dixit, 1993].

Рассмотрим некоторые свойства процесса, заданного уравнением (9). В каждый момент времени переменная $x(t)$ является случайной величиной, имеющей логнормальное распределение. В частности, известно, что таким процессом моделируется динамика цен на многие реальные активы [Dixit, Pindyck, 1994]. В начальный момент времени невозможно гарантировать, чтобы будущие значения $x(t)$ превосходили некоторый наперед заданный параметр $A > 0$, но мы можем сформулировать следующую задачу: для заданного параметра $A > 0$ определить минимальное значение x_0^*, чтобы вероятность события $x(t) \geq A$, $t \geq 0$ при условии $x(t_0) \geq x_0^*$ была равна 0,95. Значения $x(t_0) \geq x_0^*$ будем называть *допустимыми относительно параметра A*. Задача поиска минимального допустимого значения решается с помощью методов построения границ интервала оценки, приведенных в [Зятчин, 2006]. Здесь показано, что нижняя граница оценки состояний процесса строится в виде $x^-(x_0, \Delta t) = x_0 e^{M - 2\sigma\sqrt{t}}$, где $M = \left(\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)t$. Очевидно, что x^- является возрастающей функцией относительно параметра x_0. Рассмотрим первую производную $x^-(t)$:

$$(x^-)' = x_0\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma}{\sqrt{t}}\right)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - 2\sigma\sqrt{t}},$$

следовательно, в точке $\sqrt{t} = \dfrac{2\sigma}{2\mu - \sigma^2}$ выполнено необходимое условие существования экстремума.

Исследуем функцию x^- на выпуклость:

$$(x^-)'' = x_0\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt[3]{t}} + \left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t - 2\sigma\sqrt{t}\right)^2\right)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - 2\sigma\sqrt{t}} > 0 \text{ при } x_0,$$

значит, функция — выпуклая.

Потребуем выполнение условия $x(t) \geq A$, тогда решение рассматриваемой задачи записывается в виде:

$$\left[\begin{array}{ll} x_0^* = Ae^{2\sigma\sqrt{T} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}, \text{ если } 2\mu - \sigma^2 < 0; & (a) \\ x_0^* = Ae^{2\sigma\sqrt{T} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}, \text{ если } 2\mu - \sigma^2 > 0,\ t^* \geq T; & (b) \\ x_0^* = Ae^{2\sigma\sqrt{t^*} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t^*}, \text{ если } 2\mu - \sigma^2 > 0,\ t^* < T. & (c) \end{array}\right.$$

Рассмотрим графики x^- для случаев (a), (b), (c), рис. 5. В случае (a) функция оценки является монотонно убывающей. В случаях (b) и (c) функция имеет экстремум в момент $t^* = \left(\dfrac{2\sigma}{2\mu - \sigma^2}\right)^2$. Минимальное допустимое значение x_0^* в данном случае зависит от взаимного расположения моментов времени t^* и T.

В дальнейшее рассматриваются только допустимые значения x_0.

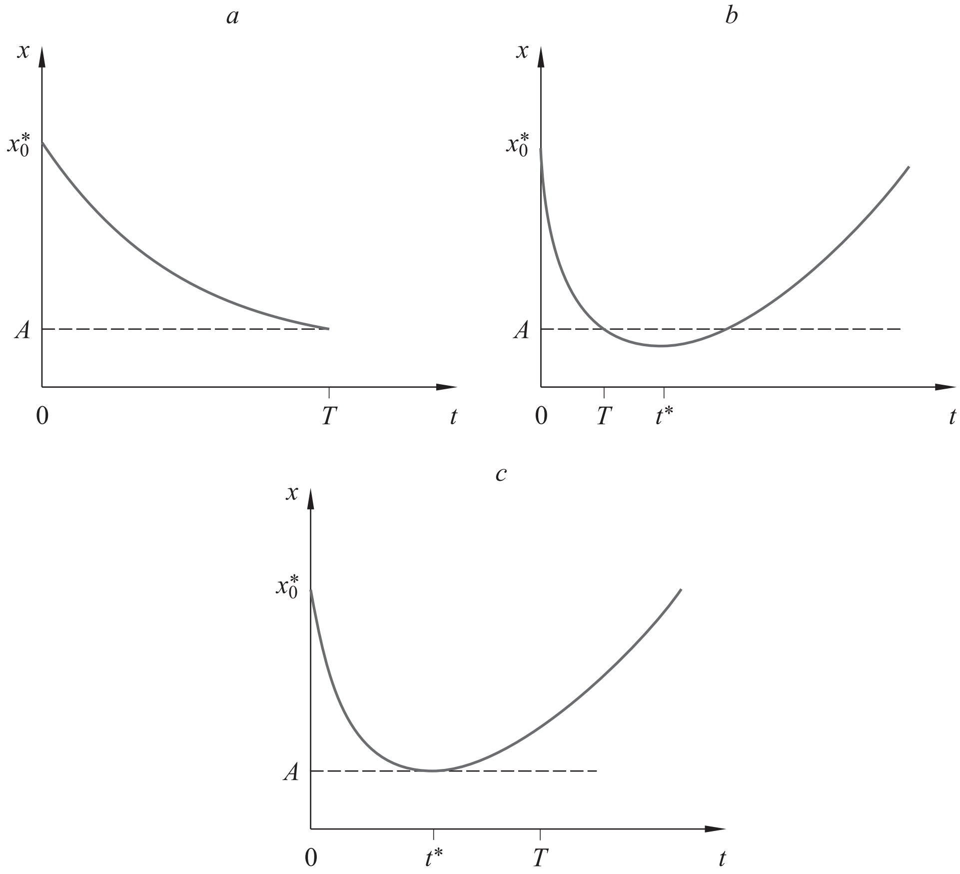

Рис. 5. Точки минимума функции оценки состояния стохастического процесса

Сформулируем еще одно свойство геометрического броуновского движения.

Теорема 3. *Рассмотрим стохастический процесс* $dx = \mu x dt + \sigma x dz$ *и заданный параметр* $A > 0$. *Тогда* $P\{x(t) \le A\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, *если* $2\mu - \sigma^2 > 0$ *и* $P\{x(t) \le A\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$, *если* $2\mu - \sigma^2 < 0$.

Доказательство. Заметим, что область значений процесса $dx = \mu x dt + \sigma x dz$ при $x_0 > 0$ есть множество положительных рациональных чисел. Рассмотрим вероятности $P\{x(t) \le A\} = P\{\ln x(t) \le \ln A\}$.

Согласно лемме Ито [Ito, 1951], если переменная $x(t)$ изменяется по закону $dx(t) = \mu x dt + \sigma x dz$, то $d \ln x(t) = \left(\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$. Согласно свойствам обобщенного винеровского процесса, случайная величина $\ln x(t + \Delta t)$ имеет нормальное распределение, т. е. $\ln x(t + \Delta t) \sim N\left(\ln x(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$. Функция распределения F для $\ln x(t + \Delta t)$ имеет вид:

$$F\left(r, \ln x(t) + \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right), \sigma\sqrt{\Delta t}\right) = \Phi(s),$$

где $\quad \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{s} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \; s = \frac{r - \left(\ln x(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}.$

Следовательно,

$$P\{\ln x(t) \leq \ln A\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{\varphi - \psi\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

где $\varphi = \ln A - \ln x(t)$, $\quad \psi = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Поскольку $P\{x(t) \leq A\} = P\{\ln x(t) \leq \ln A\}$, имеем:

a) если $\psi = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) > 0$, тогда $\frac{\varphi - \psi\Delta t}{\delta\sqrt{\Delta t}} \xrightarrow[\Delta t \to \infty]{} -\infty$ и $P\{x(t) \leq A\} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$,

b) если $\psi = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) < 0$, тогда $\frac{\varphi - \psi\Delta t}{\delta\sqrt{\Delta t}} \xrightarrow[\Delta t \to \infty]{} +\infty$ и $P\{x(t) \leq A\} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим выборку из стандартного нормального распределения для моделирования значений процесса $dx(t) = \mu x dt + \sigma x dz$ [Dixit, Pindyck, 1994]. Объем выборки составил 6000 значений. Пусть $A = 5$, $x(0) = 10$. Результаты имитационного моделирования в случаях (*a*) и (*b*) приведены на рис. 6.

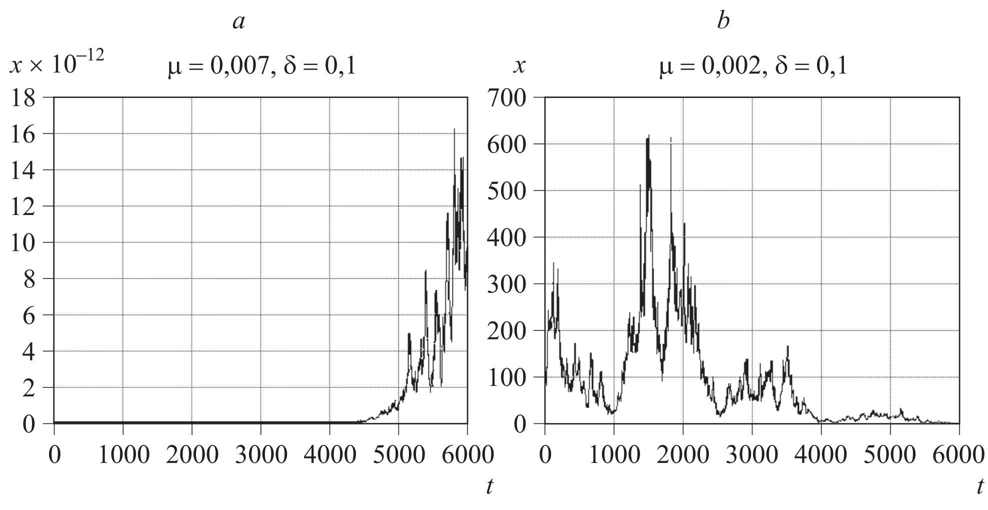

Рис. 6. Асимптотическое поведение состояний стохастического процесса

В Приложении приведены математические доказательства используемых теорем и утверждений.

Доказательство теоремы 1.

Определим аргумент максимизации функции $g_i(x,q) = q_i((a-bQ)x-c)$:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(q_i((a-bQ)x-c)-s_i(x)) = \frac{\partial}{\partial q_i}(q_i((a-bQ)x-c)) = ax-bQx-c-bxq_i.$$

Следовательно,

$$q_i^* = \frac{a}{b}-Q^*-\frac{c}{bx},\ I\in N \text{ и } Q^* = \sum_{i=1}^{I} q_i^* = \frac{na}{b}-nQ^*-\frac{nc}{bx}. \qquad (17)$$

Условие второго порядка имеет вид: $\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}(q_i(a-bQ)x-c)) = -2bx$, где $x>0$ и $b>0$. Таким образом, функция $g_i(q_i, q_{-i}, x)$ является вогнутой по q_i. Решая (17), определяем Q^* и q_i^*, как наилучший ответ игрока i на стратегию дополнительной коалиции q_{-i}^*, в явной форме:

$$q_i^* = \frac{ax-c}{(n+1)xb},$$
$$Q^* = \frac{na}{(n+1)b}-\frac{nc}{(n+1)bx}.$$

По условию игры $\Gamma(x)$, $q_i>0$. Следовательно, при $s_i(x)\equiv 0$ равновесие по Нэшу существует при $x>c/a=A_1$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим интервал $0<x\le A_1$. Предположим, что игрок i выбрал некоторую стратегию $\overline{q}_i > q_i^*(x) = 0$. При этом его выигрыш $g_i(\overline{q}_i, q_{-i}^*, x) = \overline{q}_i(ax-c) - b\overline{q}_i^2 x < 0$, поскольку при $0<x\le A_1$ разность $ax - c < 0$. Следовательно,

$$0 = g_i\left(q_i^*, q_{-i}^*, x\right) > g_i\left(q_i, q_{-i}^*, x\right).$$

Предположим, что $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b \le 0$. Тогда, согласно лемме 2, в игре $\Gamma(x)$, $x>A_1$ равновесие по Нэшу существует при любом размере штрафа.

Далее будем рассматривать случай $ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b > 0$.

На интервале $A_1<x\le A_2$ доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. С учетом условий (5), ситуация q^* является равновесием по Нэшу.

Рассмотрим интервал $x>A_2$. Покажем, что ситуация q^{**} является равновесием по Нэшу. Пусть при $x>A_2$ существует такой игрок i и такая стратегия q_i', что $K_i\left(q_{-i}^{**}, q_i'\right) > K_i\left(q^{**}\right)$.

Пусть $q_i' < q_i^{**}$, тогда $\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} d\beta q_j + d\beta q_i' < \theta$, следовательно:

$$K_i\left(q_{-i}^{**}, q_i', x\right) = g_i\left(q_{-i}^{**}, q_i', x\right).$$

Функция $g_i(x, q_{-i}, q_i)$ является вогнутой по q_i и достигает максимума в q^*. $q_i^{**} \le q_i^*$ как решение задачи условной максимизации (5), следовательно, на интервале $[0, q_i^{**}]$ функция $g_i\left(x, q_{-i}^{**}, q_i\right)$ является строго возрастающей. Значит, $K_i\left(q_{-i}^{**}, q', x_i\right) = g_i\left(q_{-i}^{**}, q_i', x\right) < g_i\left(q_i^{**}, x\right) = K_i\left(q^{**}, x\right)$, что противоречит предположению.

Пусть $q_i' > q_i^{**}$. Согласно предположению теоремы, функция $s_i(x)$ такова, что $g_i(q^{**}) \ge g_i(q_{-i}^{**} \parallel q_i) - s_i(x)$. В этом случае $K_i\left(q_{-i}^{**}, q_i'\right) = g_i\left(x, q_{-i}^{**}, q'\right) - s_i(x) \le g_i\left(x, q_i^{**}\right) = K_i\left(q_i^{**}\right)$, что противоречит предположению, следовательно, неравенство $K_i\left(q_{-i}^{**}, q_i'\right) > K_i\left(q^{**}\right)$ неверно, т. е. для любого игрока i и всех q_i' имеет место неравенство $K_i\left(q_{-i}^{**}, q_i'\right) \le K_i\left(q^{**}\right)$. Теорема доказана.

Доказательство утверждения 1.

Пусть $ad\beta - \dfrac{(n+1)}{n}\theta b > 0$. Следовательно, $A_2 = \dfrac{cd\beta}{ad\beta - \frac{(n+1)}{n}\theta b} > \dfrac{c}{a} = A_1 > 0$. Согласно теореме 3, вероятность события $x(t) \ge A_2$ стремится к 1 при $t \to \infty$, если выполнено условие $2\mu - \sigma^2 > 0$. Вместе с тем при $2\mu - \sigma^2 < 0$ вероятность события $x(t) < A_1$ стремится к 1 при $t \to \infty$. Известно (см.: [Hull, 1997]), что переменная в процессе (9) имеет логнормальное распределение, следовательно, $x(t) > 0$ при любом $t \ge 0$. Утверждение доказано.

Приложение 3

Вывод уравнения Беллмана–Флеминга для дифференциальной игры $G(t_0, x_0)$

Представим интеграл в (10) в виде суммы интегралов на промежутках от 0 до dt и от dt до T. В момент dt переменная принимает значение dx, которое не известно в момент 0, но дано ее распределение [Dixit, 1993]. С момента dt рассматривается интеграл $J_i(x_0 + \Delta x, q)$, значение которого необходимо дисконтировать на 0:

$$J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right) = \max_{q_i}\left\{g_i(x, q)dt + e^{-rdt}E\left[J_i(x + dx, q_i, q_{-i})\right]\right\}.$$

Отбрасывая элементы $o(dt)$, получим:

$$J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right) = \max_{q_i}\left\{g_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)dt + \right.$$

$$\left. + (1 - rdt)\left[J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right) + \left(EJ_i\left(x_0 + dx, q_i, q_{-i}\right)\right) - J_i(x_0, q_i^*, q_{-i}))\right]\right\} =$$

$$= \max_{q_i}\left\{g_i(x_0, q)dt + J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right) - rJ_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)dt + \right.$$

$$\left. + \left[E\left(J_i\left(x_0 + dx, q_i, q_{-i}\right) - J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)\right)\right] + rdt\left[\left(EJ_i\left(x_0 + dx, q_i, q_{-i}\right) - J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)\right)\right]\right\}.$$

Следовательно,

$$J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)dt = \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r}g_i(x_0, q)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\left[\left(EJ_i(x_0 + dx, q) - J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)\right)\right] + dt\left[\left(EJ_i(x_0 + dx, q) - J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)\right)\right]\right\} =$$

$$= \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r}g_i(x_0, q)dt + \left(\frac{1}{r} + dt\right)E[dJ_i]\right\}.$$

По лемме Ито [Ito, 1951], имеем:

$$E[dJ_i] = \mu J_i'\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 J_i''\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)dt.$$

В результате:

$$J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)dt =$$
$$= \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r}g_i(x_0, q)dt + \left(\frac{1}{r} + dt\right)\left(\mu J_i'\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 J_i''\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)dt\right)\right\}$$

или, отбросив элементы o(dt), получаем:

$$J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right)dt = \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r}g_i(x_0, q)dt + \frac{1}{r}\left(\mu J_i'\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 J_i''\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)dt\right)\right\} =$$
$$= \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r}g_i(x_0, q)\right\}dt + \frac{1}{r}\left(\mu J_i'\left(x, q_i^*, q_{-i}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 J_i''\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)\right)dt.$$

В итоге уравнение Беллмана–Флеминга принимает вид:

$$J_i\left(x_0, q_i^*, q_{-i}\right) = \max_{q_i}\left\{\frac{1}{r}g_i(x_0, q)\right\} + \frac{1}{r}\left(\mu J_i'\left(x, q_i^*, q_{-i}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 J_i''\left(x, q_i^*, q_{-i}\right)\right).$$

Литература

Благов Ю. Е. Генезис концепции корпоративной социальной ответственности // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. Менеджмент. 2006. Вып. 2. С. 3–24.

Благов Ю. Е. и др. Доклад о социальных инвестициях в России — 2008 / Под общ. ред. Ю. Е. Благова, С. Е. Литовченко, Е. А. Ивановой. М.: Ассоциация менеджеров, 2008.

Зенкевич Н. А., Зятчин А. В. Исследование динамической модели Макдональда–Сайгела // Математические методы исследования экономики / Под ред. Н. А. Зенкевич. СПб.: Изд-во МБИ, 2004. С. 47–56.

Зенкевич Н. А., Петросян Л. А. Проблема временной состоятельности кооперативных решений в менеджменте // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. Менеджмент. 2007. Вып. 1. С. 7–42.

Зятчин А. В. Стохастическая модель процесса конкуренции в случае полной, неполной и асимметричной информации // Математические исследования в экономике / Под ред. Н. А. Зенкевича, Д. В. Кузютина. СПб.: Изд-во МБИ, 2006. С. 131–148.

Лопатин В. Н. Менеджмент и маркетинг в экологии и природопользовании. М.: НИА-Природа, 2001.

Пахомова Н. В., Эндерс А., Рихтер К. Экологический менеджмент: Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2004.

Петросян Л. А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестн. Ленингр. ун-та. 1977. № 19. С. 46–52.
Петросян Л. А., Кузютин Д. В. Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость. СПб.: СПбГУ, 2000.
Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998.
Петросян Л. А., Захаров В. В. Математические модели в экологии. СПб.: СПбГУ, 1996.
Системы управления окружающей среды. Общие руководящие указания по принципам, системам и средствам обеспечения функционирования. М.: Изд-во стандартов, 1998.
Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. Т. 2. СПб.: Экономическая школа, 2000.
Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / Пер. с англ. М. Г. Бутрим, П. К. Катышева; под ред. А. Н. Ширяева. М.: Мир, 1978.
Bowen H. Social Responsibility of the Businessman. N. Y.: Harper & Row, 1953.
Cabo F., Escudero E., Martin-Herran G. A Time-Consistent Agreement in an Interregional Differential Game on Pollution and Trade // International Game Theory Review. 2006. Vol. 8. N 3. P. 369–393.
Chatterjee K., Samuelson W. Bargaining under Incomplete Information // Operations Research. 1983. Vol. 31. N 5. P. 835–851.
Dixit A. The Art of Smooth Pasting. Princeton, NJ: Princeton University, 1993.
Dixit A. K., Pindyck R. S. Investment under Uncertainty. Princeton, MA: Princeton University Press, 1994.
Dockner E. J., Van Long N. International Pollution Control: Cooperative versus Noncooperative Strategies // Journal of Environmental Economics and Management. 1993. Vol. 25. N 1. P. 13–29.
Haurie A., Krawczyk J.B., Roche M. Monitoring Cooperative Equilibria in a Stochastic Differential Games // Journal of Optimization Theory and Applications. 1994. Vol. 81. N 1. P. 79–95.
Hatcher A. Firm Behaviour under Pollution Ratio Standards with Non-Compliance // Environmental and Resource Economics. 2007. Vol. 38. N 1. P. 89–98.
Hull J.C. Options, Futures, and Other Derivatives. 3rd ed. London, UK: Prentice-Hall, 1997.
Ito K. On Stochastic Differential Equations // Memoirs, American Mathematical Society. 1951. Vol. 4. P. 1–51.
Jorgensen S., Zaccour G. The Consistency In Cooperative Differential Games // Decision and Control in Management Sciences: Essays in Honor of Alain Haurie / Ed. by G. Zaccour. London: Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 349–366.
Jorgensen S., Martin-Herran G., Zaccour G. Agreeability and Time-Consistency in Linear-State Differential Games // Journal of Optimization Theory and Applications. 2003. Vol. 119. N 1. P. 49–63.
Kaitala V., Pohjola M. Sustainable International Agreements on Greenhouse Warming — A Game Theory Study // Control and Game Theoretic Models of the Environment. Annals of the International Society of Dynamic Games / Eds. C. Carraro, J. A. Filar. Vol. 2. Boston: Birkhäuser, 1995. P. 67–87.

Levitt T. The Dangers of Social Responsibility // Harvard Business Review. 1958. Vol. 36. N 5. P. 41–50.

Petrosyan L.A., Grauer L.V. Strong Nash Equilibrium in Multistage Games // International Game Theory Review. 2004. Vol. 4. N 3. P. 255–264.

Petrosjan L. A., Zaccour G. Time-Consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Control // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 27. N 3. P. 381–398.

Petrosjan L. A., Zakharov V. V. Mathematical Models in Environmental Policy Analysis. N. Y.: Nova Science Publishing, 1996.

Petrosjan L.A., Zenkevich N. A. Game Theory. Singapore: World Scientific Publ. Co. Pte., 1996.

Porter M., Kramer M. Strategy and Society: The Link between Competitive Advantage and Corporate Social Responsibility // Harvard Business Review. 2006. Vol. 84. N 12. P. 78–92.

Steurer R., Langer M., Konrad A., Martinuzzi A. Corporations, Stakeholders and Sustainable Development I: A Theoretical Exploration of Business-Society Relations // Journal of Business Ethics. 2005. Vol. 61. N 3. P. 263–281.

Tietenberg T. Environmental Economics and Policy. London: Pearson Education, 2007.

Yeung D. W. K. Infinite-Horizon Stochastic Differential Games with Dranching Payoffs // Journal of Optimization Theory and Applications. 2001. Vol. 111. P. 445–460.

Yeung D. W. K., Petrosyan L. A. Cooperative Stochastic Differential Games. N. Y.: Springer-Verlag, 2006.

Yeung D. W. K., Petrosyan L. A. Subgame Consistent Cooperative Solutions in Stochastic Differential Games // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. Vol. 120. P. 651–666.

Zenkevich N. A., Zyatchin A. V. Oligopoly Competition under Environmental Design // Game Theory and Applications. 2007. Vol. 12. P. 193–206.

Zyatchin A. V., Zenkevich N. A. Nash Equilibrium in a Stochastic Differential Game with Perfect, Imperfect and Unsymmetrical Information // Stability and Control Processes (SCP 2005). 2005. P. 543–553.

Статья поступила в редакцию 2 декабря 2008 г.