ОБЩИЙ И СТРАТЕГИЧЕСКИЙ МЕНЕДЖМЕНТ

Н. А. Зенкевич, М. А. Гладкова

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ «КАЧЕСТВО — ЦЕНА» НА ОТРАСЛЕВОМ РЫНКЕ

Исследование проблем управления качеством находится в центре внимания современной теории отраслевой организации. Это обусловлено тем, что уровень качества производимой продукции является важным инструментом управления фирмой и необходимым условием обеспечения ее конкурентоспособности. В статье представлены результаты исследования трехэтапной теоретико-игровой модели, когда на первом шаге фирма выбирает рабочий диапазон качества, на втором — уровень качества и на третьем этапе — назначает цену на произведенную продукцию. Решения исследуемой модели дуополии получены в явном виде.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее динамично развивающихся направлений экономической науки является исследование проблем управления качеством. Это объясняется тем, что в настоящее время качество является важнейшим средством и необходимым условием обеспечения конкурентоспособности на микро-, мезо- и макроуровнях экономики. Активизация деятельности в области управления качеством способствует формированию действенного механизма социально-экономических преобразований в стране. Развитие науки, техники и технологий предоставляет человечеству принципиально новые возможности в достижении высокого уровня качества продукции и услуг, в улучшении на этой основе материальных, социальных и культурных условий жизни.

В настоящее время проблема оценки качества на основе рыночных показателей является актуальной задачей. Цель настоящей работы — построение теоретико-игровых моделей конкуренции, на основе которых менеджеры компаний могли бы выработать стратегии производства товаров требуемого качества в условиях конкуренции. В данной статье под качеством товара мы понимаем его количественную оценку, т. е. некоторое число из заданного числового диапазона. При этом предполагается, что качество товара выступает переменной управления; оптимальное качество — такая количественная оценка качества, на которой достигается максимум функции прибыли фирмы (в условиях монополии фирм) или которая является равновесной (в условиях конкуренции фирм на отраслевом рынке). В результате проведенного нами теоретического исследования были разработаны и решены несколько базовых теоретико-игровых моделей. В каждой из них предполагается, что фирмы конкурируют по качеству товара и ценам.

Одним из ключевых составляющих конкурентоспособности фирмы выступает вопрос о качестве производимых ею товаров или оказываемых услуг [Куштавкин, 2007]. Понятие качества может быть применено как к оказываемым услугам, так и к производимым товарам. В статье исследованы модели отраслевой конкуренции типа «качество — цена» для однопродуктовых фирм. Однако полученные результаты имеют содержательную интерпретацию и в случае моделирования конкуренции по качеству предоставляемых услуг, например конкуренции между фирмами, оказывающими услуги мобильной связи.

Существуют различные подходы к количественной оценке качества. В данной работе мы придерживаемся идеи оценки необходимого качества производимого товара на основе решения соответствующей теоретико-игровой модели.

В последние годы значение теории игр существенно возросло во многих областях экономических и социальных наук. В экономике она применима не только для решения общехозяйственных задач, но и для анализа стратегических проблем предприятий, разработок конкурентоспособных организационных структур, схем стимулирования и мотивации персонала.

Уже в момент зарождения теории игр, которым считают публикацию в 1944 г. монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [Neumann von, Morgenstern, 1944], многие предсказывали революцию в экономической науке благодаря использованию нового подхода. Эти прогнозы нельзя было считать излишне смелыми, так как с самого начала данная теория претендовала на описание рационального поведения при принятии решений во взаимосвязанных ситуациях, что характерно для большинства актуальных проблем в экономических и социальных науках. Такие тематические области, как стратегическое поведение, конкуренция, кооперация, риск и неопределенность, являются ключевыми в теории игр и непосредственно связаны с решением управленческих задач. Прогресс в отраслевой экономике показал плодотворность методов теории игр в прикладной сфере.

Модели, описанные в работе, были рассмотрены в условиях дифференциации по качеству. Дифференциация товаров — это ситуация, при которой покупатели рассматривают идентичную продукцию конкурирующих производителей как схожую, но все же не полностью взаимозаменяемую. Дифференциация может принимать различные формы: технологическое совершенство, внешний вид товара, послепродажный сервис и т. д. Различают горизонтальную дифференциацию (при одинаковых характеристиках товары различны для разных потребителей) и вертикальную (потребители предпочитают товар с лучшими характеристиками, но степень предпочтения разная). Теоретико-игровые модели отраслевой конкуренции рассмотрены для случая вертикальной дифференциации по качеству продукции.

Теоретико-игровое моделирование дуополии в условиях конкуренции по качеству продукции дает фирмам возможность получить ряд конкурентных преимуществ. Так, фирма путем инвестиций в технологические инновации имеет возможность управлять диапазоном качества производимого товара и тем самым добиваться лидерства среди фирм-конкурентов. Необходимо также отметить, что, инвестируя в новые технологии, фирма способна управлять затратами на производство товаров определенного качества, что может обеспечить ей конкурентные преимущества (лидерство по затратам). Основной акцент стратегии лидерства по затратам делается на достижении более низкой себестоимости по сравнению с конкурентами.

В современной научной литературе известно много исследований, связанных с проблемами оптимизации качества в условиях конкуренции, что очередной раз подчеркивает актуальность рассматриваемой проблематики.

В своей работе О. Коибьен [Coibion, Einav, Hallak, 2007] демонстрирует значительные различия в эластичностях спроса на продукты различного качества. Анализируется простая модель, которая допускает вертикальную и горизонтальную дифференциацию и учитывает возможность эндогенного входа на рынок. В результате авторами установлено, что большинство экономических факторов, таких как чувствительность потребителя к цене, границы дифференциации продукта и невозвратные затраты на вход, приведут к более низкой равновесной эластичности спроса на продукцию более высокого качества. В то же время экономические факторы, такие как предельные производственные затраты и распределение параметра склонности потребителей платить за качество товара, могут привести к обратной зависимости.

На многих рынках правительство устанавливает минимальный уровень качества, в то время как некоторые производители конкурируют по качеству выпускаемой продукции, расширяя его возможные границы. Используя модель дуополии в условиях вертикальной дифференциации по качеству, авторам С. Лутсу, Т. Лайану и Дж. Максвелу [Lutz, Lyon, Maxwell, 2000] удалось показать, что если фирма, производящая продукт более высокого качества, установит его до того, как правительство провозгласит соответствующие ограничения качества, то границы допустимого качества ослабляются и прибыль падает (см., напр.: [Kuhn, 2007]).

В работе Р. Аоки [Aoki, Pursa, 1996] исследуется, как инвестиции влияют на выбор качества производимого фирмами товара. Рассматриваются модели в условиях вертикальной дифференциации по качеству. Установлено, что в модели с последовательным выбором качества фирмы будут производить меньшие вложения в качество, чем в модели с одновременным выбором качества. Более того, автор показывает, что, несмотря на больший совокупный доход, потребительские и социальные излишки в случае последовательного выбора качества будут ниже.

Х. Бестер [Bester, 1998] высказывает предположение, что неполная информация о качественных характеристиках товаров уменьшает стремление производителя к горизонтальной дифференциации. В результате доказано, что равновесный исход может быть охарактеризован как «минимальная дифференциация». Автор утверждает, что при горизонтальной дифференциации фирмы стремятся к прямой конкуренции, концентрируясь в одном географическом месте. Возможно возникновение ситуации, при которой потребитель выиграет от наличия неполной информации о качестве продукта.

В работе У. Леман-Груба [Lehmann-Grube, 1997] рассмотрена двухшаговая модель в условиях вертикальной дифференциации. Доказано, что для произвольной вогнутой функции оценки качества с фиксированными затратами фирма, выбирающая высокое качество на первом шаге, получает бóльшую прибыль. Равновесие найдено в двух случаях: во-первых, в чистых стратегиях для игры с одновременным выбором качества; во-вторых, если фирмы выбирают требуемое качество последовательно (см., напр.: [Liua, Serfes, 2005]).

Исследования, приведенные в данной статье, опираются в основном на работы М. Мота и Чонг Джу Чой, которые также рассматривали модели дуополии в условиях вертикальной дифференциации по качеству товаров. Чонг Джу Чой удалось установить соответствие между оптимальными значениями качества производимых фирмами товаров в численном виде.

Чонг Джу Чой и Хьюн Сонг Шин [Choi, Shin, 1992] рассмотрели модели дуополии в условиях вертикальной дифференциации, когда нет покрытия рынка. Так же, как и в нашем исследовании, здесь предполагается, что под качеством понимается его количественная оценка, лежащая в некотором заданном диапазоне. Авторы установили, что фирма, производящая товар более низкого качества, будет производить товар, качество которого относится к качеству продукта второй фирмы как 4 : 7, а цены на эти товары будут относиться как 2 : 7 соответственно.

Недостатком этой модели является то, что авторы рассмотрели только случай, когда рынок непокрыт. Нам удалось распространить полученные Чонг Джу Чой результаты на более общую модель, а также получить решение для случая, когда рынок покрыт.

В работе М. Мотта [Motta, 1993] проанализированы два вида моделей вертикальной дифференциации продуктов в целях изучения влияния конкуренции по цене и количеству на выбор равновесного решения. Модели различаются затратами на качество продукции. В одном случае они постоянные, в другом — переменные. Установлено, что дифференциация продукции увеличивается во всех рассмотренных случаях по сравнению с более ранними результатами для симметричных моделей выбора качества при количественной конкуренции по Курно. Автор показывает, что дифференциация фирм существеннее в случае конкуренции по Бертрану, чем по Курно, при этом исследован только случай непокрытого рынка.

В ходе исследования мы распространяем модель на случай, когда рынок покрыт, а также предполагаем, что фирмы могут управлять границами диапазона качества производимого продукта. Наряду с вышеописанными исследованиями и результатами в настоящей статье анализируется проблема нахождения оптимального качества продукции.

Для проведения расчетов показателей качества построены теоретико-игровые модели оценки работы фирмы по производству товаров данного качества в условиях конкуренции. В основу построенных моделей положены модель Ж. Тироля [Тироль, 2000], а также ее развитие в работе Н. А. Зенкевича [Зенкевич, 2003].

Проведенные исследования включают в себя две модели: модель оценки качества продукции в условиях монополии и обобщенную модель оценки качества при дуополии фирм. Целью каждой фирмы в обеих предложенных моделях является максимизация прибыли.

В статье решается задача нахождения оптимального качества производимой продукции при разумных значениях параметров моделей оценки качества продукции в условиях вертикальной дифференциации. Преследуется цель не только построения математических методик оценки качества продукции, но и решения количественных примеров оценивания исследуемых характеристик.

В случае монополии рассмотрена следующая двухшаговая задача:

1) на первом шаге, в предположении, что качество производимого продукта задано, фирма определяет его будущую цену, при которой прибыльность работы фирмы оказывается максимальной;
2) с учетом результатов, полученных в первой задаче, на втором шаге фирма оценивает, при каком качестве продукции достигается максимум функции прибыли фирмы.

Предположение, что фирма является монополистом на рассматриваемом рынке, позволило провести не только математическое моделирование, но и количественное оценивание рассматриваемых параметров. Поставленная задача решена в явном виде для случая монополии фирмы на некотором региональном рынке. В модели предполагается, что затраты на производство исследуемого товара зависят от его качества. Рассмотрены три типа таких зависимостей: постоянные, линейные и квадратичные.

Также рассмотрена модель оценки качества продукции в условиях дуополии фирм и вертикальной дифференциации. Исследованная модель является развитием модели М. Мотта [Motta, 1993], в которой при отсутствии покрытия рынка анализируется случай дуополии фирм в условиях вертикальной дифференциации по качеству производимого продукта. В работе М. Мотта формулируется и решается следующая двухшаговая задача: сначала фирмы производят вложения в качество изготавливаемого продукта, а затем конкурируют по ценам в зависимости от выбранного на первом шаге качества.

Этот подход распространен нами на случай, когда рынок покрыт, причем подразумевается, что фирмы могут управлять границами качества производимого продукта, что изменяет вид функции прибыли. В такой постановке задача является трехшаговой:

1) на первом шаге фирмы определяют уровень инвестиций и диапазоны качества подготовки своей продукции;
2) на втором шаге они конкурируют по качеству продукции в предположении известных диапазонов качества продукции;
3) на третьем шаге фирмы конкурируют по уровню цен при известных качествах производимой продукции.

Задача решена методом обратной индукции.

Для модели оценки качества продукции в условиях дуополии и вертикальной дифференциации исследованы случаи покрытия рынка и отсутствия покрытия рынка.

Для получения оптимального качества производимой продукции решена задача нахождения равновесия по Нэшу в сформулированных выше моделях. При решении поставленных задач используются методы теории игр и математического анализа. Представленная методика нахождения оптимального качества производимой продукции для описанных моделей оценки качества продукции в условиях вертикальной дифференциации, а также приведенные примеры количественного оценивания исследуемых характеристик могут быть использованы при выработке рекомендаций по планированию производственной деятельности фирм.

Располагая экспертными оценками характеристик рынка, можно провести расчеты по предложенным моделям и получить количественные результаты, анализ которых позволяет выработать оптимальные стратегии фирм по выпуску продукции, востребованной на рынке.

Перейдем к изложению содержания работы.

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ В УСЛОВИЯХ МОНОПОЛИИ

Постановка задачи. Для простоты предположим, что каждый потребитель может приобрести (или нет) единицу рассматриваемого товара. Тогда функция полезности потребителя со склонностью к качеству θ при покупке товара качества s по цене p примет вид:

$$U_\theta(p) = \begin{cases} \theta s - p, & p \le \theta s, \\ 0, & p > \theta s, \end{cases} \tag{1}$$

где s — качество товара, p — уровень цены на товар качества s, θ — параметр склонности к качеству для данного потребителя.

Понятно, что потребителю с параметром склонности к качеству θ (далее будем говорить «потребитель θ») имеет смысл рассматривать вопрос о приобретении товара качества s по цене p только в том случае, если его полезность неотрицательна. Заметим, что в выражении (1) величина θs — это максимальная цена потребителя θ, при которой он готов покупать товар качества s («ценность» товара для потребителя θ).

Не имея информации о распределении параметра θ на данном региональном рынке, предположим, что параметр θ равномерно распределен на единичном промежутке $\left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$, $\overline{\theta} = \underline{\theta} + 1$, $\underline{\theta} > 0$, где $\underline{\theta}$ и $\overline{\theta}$ — заданные параметры. В противном случае необходимо провести специальное исследование на рынке потребителей для определения распределения их склонности к качеству.

Будем полагать, что фирма производит товар качества s, который будет продаваться по цене $p \ge c(s)$, где $c(s)$ — удельные затраты на производство товара качества s в данной фирме.

Целевой функцией фирмы по производству товара заданного качества s является функция прибыли:

$$\Pi(p, s) = (p - c(s))D(p, s), \tag{2}$$

где p — средняя цена товара, $D(p, s)$ — функция спроса на товар качества s [Зенкевич, 2003].

В дальнейшем будем рассматривать три вида зависимости удельных затрат $c(s)$ от качества товара:

1) постоянная: $c(s) = c = \text{const}$;
2) линейная: $c(s) = k(s - \underline{s}) + \underline{c}$, $\underline{c} = c(\underline{s})$;
3) квадратичная: $c(s) = ks^2$.

В указанной постановке рассмотрим пару последовательно связанных задач:

1) нахождение монопольного уровня цены в предположении известного качества товара;
2) нахождение оптимального качества товара в условиях монополии.

Нахождение монопольных цен. Пусть качество товара s фиксировано, где $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$, а затраты на его производство равны $c = c(s)$. Разумно предполагать выполненным условие:

$$\overline{\theta}s - c \geq 0. \tag{3}$$

Тогда прибыль фирмы по производству товара качества s определяется ценой p на товар. Заметим, что функция спроса в этом случае имеет вид:

$$D(p,s) = \begin{cases} 0, & p > \overline{\theta}s, \\ \overline{\theta} - \dfrac{p}{s}, & \underline{\theta}s < p \leq \overline{\theta}s, \\ 1, & p \leq \underline{\theta}s. \end{cases}$$

На рис. 1 изображен график функции спроса на товар качества s, продающегося по цене p.

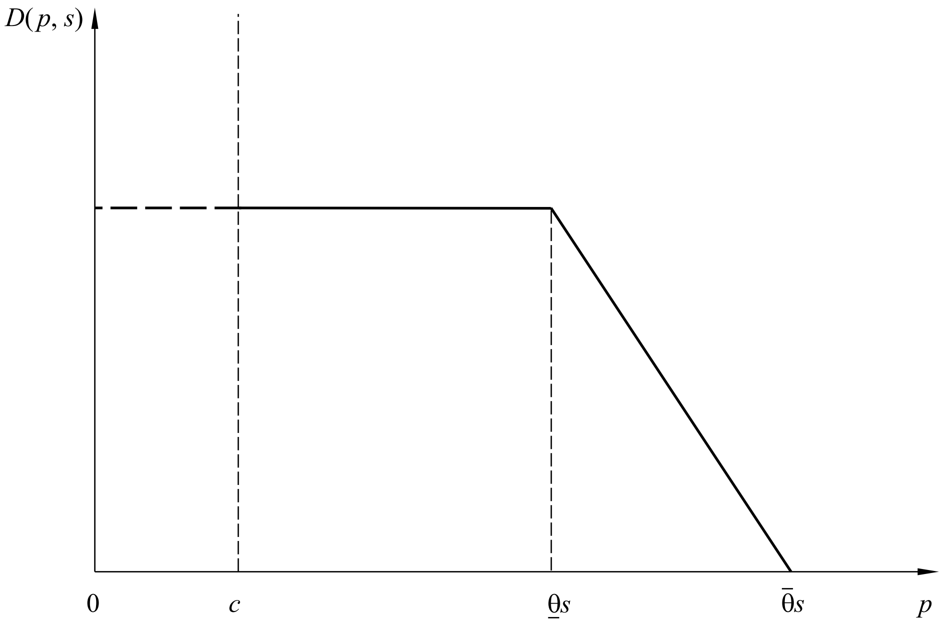

Рис. 1. Функция спроса на товар

Следуя формуле (2) для оценки прибыльности фирмы, получаем следующее выражение для прибыли:

$$\Pi(p,s)=\begin{cases}0, & p>\bar{\theta}s,\\ (p-c)\left(\bar{\theta}-\dfrac{p}{s}\right), & \underline{\theta}s<p\le\bar{\theta}s,\\ p-c, & p\le\underline{\theta}s.\end{cases}$$

На рис. 2 приведен график функции прибыли фирмы, производящей товар качества s, который будет продаваться по цене p.

Найдем оптимальную цену товара из условия первого порядка:

$$\frac{d\Pi}{dp}=\frac{-2p+\bar{\theta}s+c}{s}=0.$$

Решая уравнение относительно p, получаем: $p^m=\dfrac{\bar{\theta}s+c}{2}$.

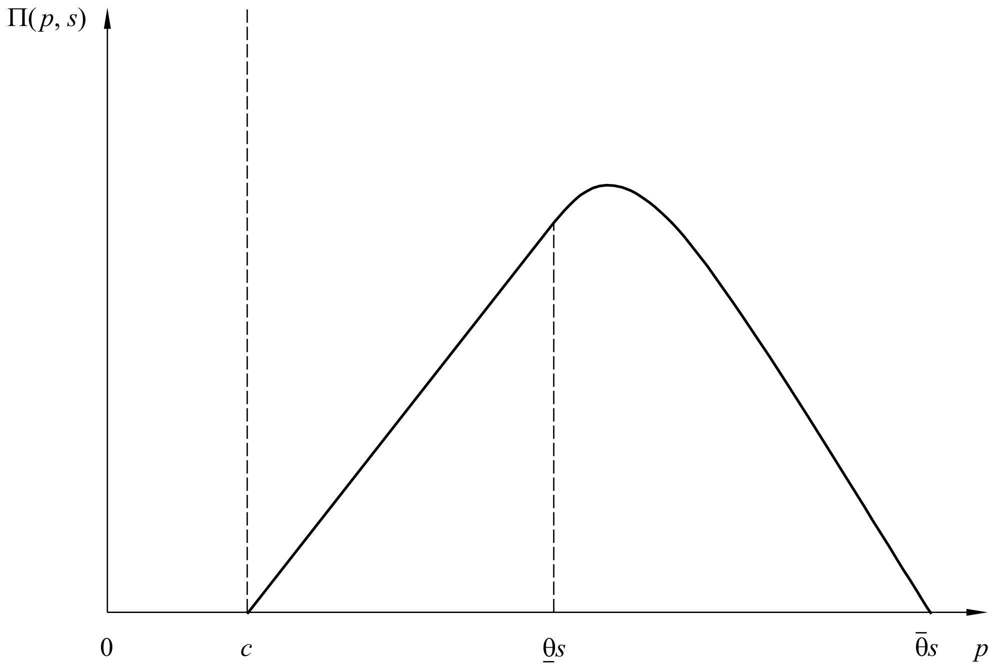

Рис. 2. Функция прибыли фирмы

Покажем, что полученное значение p^m и есть монопольный уровень цены. В силу вогнутости функции $\Pi(p,s)$ достаточно проверить, что значение p^m лежит в допустимой области значений.

Действительно, неравенство

$$p^m - c = \frac{\overline{\theta}s - c}{2} \geq 0$$

верно в силу выполнения условия (3). Двойное неравенство $\underline{\theta}s \leq p^m \leq \overline{\theta}s$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $2\underline{\theta}s \leq \leq \overline{\theta}s + c \leq 2\overline{\theta}s$. Правая часть последнего неравенства выполнена при условии (3), а левая, если $c \geq 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$. Если это условие не выполнено, то $p^m < \underline{\theta}s$. В этом случае оптимальная цена такова: $p^* = \underline{\theta}s$.

В результате, с учетом выражений для спроса и прибыли фирмы, получаем решение первой поставленной задачи в явном виде:

$$p^*(s) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\theta}s + c}{2}, & c \geq 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s, \\ \underline{\theta}s, & c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s; \end{cases}$$

$$D^*(s) = D(p^*(s), s) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\theta}s - c}{2s}, & c \geq 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s, \\ 1, & c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s; \end{cases}$$

$$\Pi^*(s) = \Pi(p^*(s), s) = \begin{cases} \dfrac{\left(\overline{\theta}s - c\right)^2}{4s}, & c \geq 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s, \\ \underline{\theta}s - c, & c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s. \end{cases}$$

Выбор оптимального уровня качества. Перейдем к решению второй из поставленных задач. Предположим, что качество товара может быть выбрано фирмой из некоторого промежутка $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$. Используя решение предыдущей задачи, проблема выбора качества сводится к нахождению максимума прибыли фирмы $\Pi^*(s)$. Будем решать ее в два этапа: сначала в предположении, что качество товара известно, находим оптимальный уровень его будущей цены. Затем определяем, какое качество рассматриваемого товара доставляет максимум функции прибыли фирмы и тем самым является оптимальным. В ходе исследования будем также учитывать, что затраты на производство товара зависят от его качества s. Здесь мы рассматриваем три типа таких зависимостей: постоянные, линейные и квадратичные [Математические исследования..., 2006].

Из решения первой задачи видно, что значение прибыли фирмы $\Pi^*(s)$ в зависимости от выбранного качества s товара равно:

$$\Pi^*(s) = \begin{cases} \dfrac{\left(\overline{\theta}s - c\right)^2}{4s}, & c \geq 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s, \\ \underline{\theta}s - c, & c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s. \end{cases}$$

1. *Случай постоянных затрат:* $c(s) = const$.

Если $c \ge 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$, то $\frac{d\Pi^*}{ds} = \frac{1}{4s^2}\left(\overline{\theta}s - c\right)\left(\overline{\theta}s + c\right)$. Далее $\frac{d^2\Pi^*}{ds^2} = \frac{c^2}{2s^3} > 0$. Тогда минимум достигается на $s = c/\overline{\theta}$, а максимум — на границе. Сравнивая, получаем $\Pi^*(\overline{s}) > \Pi^*(\underline{s})$. Поэтому $s^* = \overline{s}$.

Если же $c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$, то из линейности функции прибыли фирмы сразу следует, что $s^* = \overline{s}$.

2. *Случай линейных затрат:* $c(s) = k(s - \underline{s}) + \underline{c}$, $\underline{c} = c(\underline{s})$.

Если $c \ge 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$, то $\frac{d^2\Pi^*}{ds^2} = \frac{(\underline{c} - k\underline{s})^2}{2s^3} > 0$. Максимум достигается на границе. Сравнивая, получаем $\Pi^*(\overline{s}) > \Pi^*(\underline{s})$. Поэтому $s^* = \overline{s}$.

Если $c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$, то функция прибыли фирмы имеет вид: $\Pi^*(s) = (\underline{\theta} - k)s - (\underline{c} - k\underline{s})$. В силу линейности функции получаем:

$$s^* = \begin{cases} \overline{s}, & \underline{\theta} \ge k, \\ \underline{s}, & \underline{\theta} < k. \end{cases}$$

3. *Случай квадратичных затрат:* $c(s) = ks^2$, $k > 0$.

Если $c \ge 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$, то $\Pi^*(s) = \frac{\left(\overline{\theta}s - ks^2\right)^2}{4s} = \frac{1}{4}s\left(\overline{\theta} - ks\right)^2$, $\frac{d\Pi^*}{ds} = \frac{1}{4}\left(\overline{\theta} - ks\right)\times$ $\times\left(\overline{\theta} - 3ks\right)$. Подозрительные на экстремум точки: $s_1 = \frac{\overline{\theta}}{k}$, $s_2 = \frac{\overline{\theta}}{3k}$. Имеем $\frac{d^2\Pi^*}{ds^2} = k\left(\frac{3}{2}ks - \overline{\theta}\right)$. Поэтому $\frac{d^2\Pi^*}{ds^2}(s_1) > 0$, $\frac{d^2\Pi^*}{ds^2}(s_2) < 0$. Откуда, при $s_1 = \frac{\overline{\theta}}{k}$ достигается минимум, а при $s_2 = \frac{\overline{\theta}}{3k}$ — максимум. Поэтому $s^* = \frac{\overline{\theta}}{3k}$.

Проверим, попадает ли полученное решение в интервал $[\underline{s}, \overline{s}]$. В противном случае:

$$s^* = \begin{cases} \overline{s}, & \frac{\overline{\theta}}{3k} > \overline{s}, \\ \underline{s}, & \frac{\overline{\theta}}{3k} < \underline{s}. \end{cases}$$

Проверим также, выполняется ли условие $c \ge 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$. Полагая $s = s^* = \frac{\overline{\theta}}{3k}$, получаем, что если $\underline{\theta} \le 2$, то неравенство выполнено.

Совершенно аналогично в случае, если $c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$, то $\Pi^*(s) = (\underline{\theta} - ks)s$, $\frac{d\Pi^*}{ds} = -2ks + \underline{\theta}$. Подозрительная на экстремум точка: $s = \frac{\underline{\theta}}{2k}$. Поскольку $\frac{d^2\Pi^*}{ds^2} = = -2k < 0$, то при значении $s = \frac{\underline{\theta}}{2k}$ достигается максимум. Поэтому $s^* = \frac{\underline{\theta}}{2k}$.

Как и ранее, проверим, попадает ли полученное решение в интервал $[\underline{s}, \overline{s}]$. В противном случае:

$$s^* = \begin{cases} \overline{s}, & \dfrac{\underline{\theta}}{2k} > \overline{s}, \\ \underline{s}, & \dfrac{\underline{\theta}}{2k} < \underline{s}. \end{cases}$$

Кроме того, проверим, выполняется ли условие $c \geq 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$. Полагая $s^* = \underline{\theta}/2k$, получаем, что если $\underline{\theta} > 2$, то условия выполнены.

Сравнивая оптимальные значения функций прибыли фирмы в случаях $c \geq 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$ и $c < 2\underline{\theta}s - \overline{\theta}s$, получаем следующие решения:

1. $c(s) = \text{const}$.

$$s^* = \overline{s}\,; \; p^*(\overline{s}) = \frac{\overline{\theta}\overline{s} + c}{2};$$

$$D^*(\overline{s}) = \frac{\overline{\theta}\overline{s} - c}{2\overline{s}}; \; \Pi^*(\overline{s}) = \frac{(\overline{\theta}\overline{s} - c)^2}{4\overline{s}}.$$

2. $c(s) = k(s - \underline{s}) + \underline{c}$, $\underline{c} = c(\underline{s})$, $k > 0$.

$$s^* = \overline{s}; \; p^*(\overline{s}) = \frac{\overline{\theta}\overline{s} + k(\overline{s} - \underline{s}) + \underline{c}}{2};$$

$$D^*(\overline{s}) = \frac{\overline{\theta}\overline{s} - k(\overline{s} - \underline{s}) - \underline{c}}{2}; \; \Pi^*(\overline{s}) = \frac{\left(\overline{\theta}\overline{s} - k(\overline{s} - \underline{s}) - \underline{c}\right)^2}{4\overline{s}}.$$

3. $c(s) = ks^2$, $k > 0$.

- Если $\underline{\theta} \leq 2$, то

$$\begin{cases} \text{если } \dfrac{\overline{\theta}}{3k} < \underline{s}, \text{ то} & s^* = \underline{s}, \quad p^*(\underline{s}) = \dfrac{\overline{\theta}\underline{s} + k\underline{s}^2}{2}, \quad \Pi^*(\underline{s}) = \dfrac{(\overline{\theta}\underline{s} - k\underline{s}^2)^2}{4\underline{s}}; \\ \text{если } \underline{s} \leq \dfrac{\overline{\theta}}{3k} \leq \overline{s}, \text{ то} & s^* = \dfrac{\overline{\theta}}{3k}, \quad p^*(s^*) = \dfrac{2\overline{\theta}^2}{9k}, \quad \Pi^*(s^*) = \dfrac{\overline{\theta}^3}{27k}; \\ \text{если } \dfrac{\overline{\theta}}{3k} > \overline{s}, \text{ то} & s^* = \overline{s}, \quad p^*(\overline{s}) = \dfrac{\overline{\theta}\overline{s} + k\overline{s}^2}{2}, \quad \Pi^*(\overline{s}) = \dfrac{(\overline{\theta}\overline{s} - k\overline{s}^2)^2}{4\overline{s}}. \end{cases}$$

- Если $\underline{\theta} > 2$, то

$$\begin{cases} \text{если } \dfrac{\theta}{2k} < \underline{s}, \text{ то} & s^* = \underline{s}, \quad p^*(\underline{s}) = \underline{\theta}\underline{s}, \quad \Pi^*(\underline{s}) = (\underline{\theta} - k\underline{s})\underline{s}; \\ \text{если } \underline{s} \le \dfrac{\theta}{2k} \le \overline{s}, \text{ то} & s^* = \dfrac{\theta}{2k}, \quad p^*(s^*) = \dfrac{\underline{\theta}^2}{2k}, \quad \Pi^*(s^*) = \dfrac{\underline{\theta}^2}{4k}; \\ \text{если } \dfrac{\theta}{2k} > \overline{s}, \text{ то} & s^* = \overline{s}, \quad p^*(\overline{s}) = \underline{\theta}\overline{s}, \quad \Pi^*(\overline{s}) = (\underline{\theta} - k\overline{s})\overline{s}. \end{cases}$$

Результаты математического моделирования показывают, что в случаях постоянных и линейных функций затрат фирме выгоднее производить товары высокого качества. При квадратичной функции затрат при выборе оптимального качества важную роль играет соотношение между параметрами модели, причем оптимальным может быть низкое, высокое или промежуточное значение качества производства товара.

ТРЕХШАГОВАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

Модель конкуренции в условиях дуополии. В данном разделе исследуются модели вертикальной дифференциации — дифференциации по качеству. В вертикально дифференцированном пространстве продуктов все потребители единодушны относительно наиболее предпочтительного набора характеристик, т. е. все согласны, что товар высокого качества лучше товара низкого качества. Однако естественное упорядочение в пространстве характеристик имеет место только при одинаковых ценах.

Рассматривается случай, когда две фирмы предлагают потенциальным потребителям товары одинаковых потребительских свойств, но разного качества. Будем считать, что каждый потребитель имеет единичный спрос, но отличается склонностью к качеству.

Полезность потребителя со склонностью к качеству θ при покупке товара качества s по цене p имеет вид:

$$U_\theta(p) = \begin{cases} \theta s - p, & p \le \theta s, \\ 0, & p > \theta s, \end{cases}$$

где θ — параметр склонности к качеству данного потребителя, который равномерно распределен на промежутке $\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$, $\overline{\theta} = \underline{\theta} + 1$, $\underline{\theta} > 0$.

За функцию прибыли фирмы i по производству продукта качества s_i, где $s_i \in [\underline{s}, \overline{s}_i]$, примем следующую функцию:

$$\Pi_i(p, s, \overline{s}_i) = p_i(s) D_i(p, s) - c(s_i) - F(\overline{s}_i), \; i = 1, 2, \tag{4}$$

где p_i — цена за единицу продукции фирмы i, $p = (p_1, p_2)$ — вектор цен на товары фирм-конкурентов, $s = (s_1, s_2)$ — вектор качеств производимых товаров, $D_i(p,s)$ — функция спроса на товар качества s_i, $c(s_i)$ — затраты на производство продукции качества s_i в данной фирме (затраты на привлечение работников требуемой квалификации, аренду и содержание помещений, оплату труда, обслуживание технических средств, управленческие расходы и т. п.), $F(\overline{s}_i)$ — инвестиции фирмы в увеличение диапазона качества производимой продукции (капитальное строительство, приобретение новой технологической линии, открытие новых рабочих мест, затраты на повышение квалификации сотрудников, разработка инновационных и усовершенствованных способов производства, проведение тренингов для сотрудников и т. п.), причем $\overline{s}_i \in [\overline{s}_0, \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}]$.

Функции производственных затрат и инвестиций в диапазоны качества считаются квадратичными:

1. $c(s_i) = ks_i^2$, $k > 0$.
2. $F(\overline{s}_i) = b(\overline{s}_i - \overline{s}_0)^2$, $b > 0$.

Каждая фирма в данной модели преследует цель максимизации своей прибыли. В данной постановке задача становится трехшаговой, а именно:

1) на первом шаге фирмы-конкуренты определяют уровень инвестиций и диапазоны качества производства своей продукции;
2) на втором шаге они конкурируют по качеству производимой продукции в предположении известных диапазонов качества товаров;
3) на третьем шаге фирмы конкурируют по уровню цен на произведенные ими товары при известных качествах производимой продукции.

Нахождение равновесных цен. Пусть рассматриваемый региональный рынок товаров покрыт. В этом случае функции спроса для фирм 1 и 2 имеют вид:

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2) = \dfrac{p_2 - p_1}{\Delta s} - \underline{\theta}, \\ D_2(p_1, p_2) = \overline{\theta} - \dfrac{p_2 - p_1}{\Delta s}. \end{cases} \tag{5}$$

Для нахождения равновесных (оптимальных) цен на товары воспользуемся условием первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = \dfrac{p_2 - 2p_1 - \underline{\theta}\Delta s}{\Delta s} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = \dfrac{\overline{\theta}\Delta s - 2p_2 + p_1}{\Delta s} = 0. \end{cases}$$

Тогда функции реакции фирм примут вид:

$$\begin{cases} p_1 = R_1(p_2) = \dfrac{p_2 - \underline{\theta}\Delta s}{2}, \\ p_2 = R_2(p_1) = \dfrac{p_1 + \overline{\theta}\Delta s}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем равновесные цены:

$$\begin{cases} p_1^*(s) = \dfrac{\left(\overline{\theta} - 2\underline{\theta}\right)\Delta s}{3}, \\ p_2^*(s) = \dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)\Delta s}{3}, \end{cases}$$

равновесный спрос на продукцию фирм примет вид:

$$\begin{cases} D_1^* = \dfrac{\left(\overline{\theta} - 2\underline{\theta}\right)}{3}, \\ D_2^* = \dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)}{3}, \end{cases}$$

и прибыли фирм по производству продукции определяются в равновесии выражением:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(s) = \Pi_1\left(p^*(s), s\right) = \dfrac{\left(\overline{\theta} - 2\underline{\theta}\right)^2 \Delta s}{9} - c(s_1) - F(\overline{s}_1), \\ \Pi_2^*(s) = \Pi_2\left(p^*(s), s\right) = \dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2 \Delta s}{9} - c(s_2) - F(\overline{s}_2). \end{cases}$$

Теперь предположим, что нет покрытия рынка. Тогда функции спроса на продукцию фирм имеют вид:

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2) = \dfrac{p_2 - p_1}{\Delta s} - \dfrac{p_1}{s_1}, \\ D_2(p_1, p_2) = \overline{\theta} - \dfrac{p_2 - p_1}{\Delta s}. \end{cases} \qquad (6)$$

Аналогично случаю покрытия рынка получаем функции реакции фирм:

$$\begin{cases} p_1 = R_1(p_2) = \dfrac{s_1}{2s_2} p_2, \\ p_2 = R_2(p_1) = \dfrac{p_1 + \overline{\theta}\Delta s}{2}. \end{cases}$$

Оптимальные уровни цен и спрос на продукцию фирм равны соответственно:

$$\begin{cases} p_1^*(s) = \dfrac{\bar{\theta} s_1 \Delta s}{4s_2 - s_1}, \\ p_2^*(s) = \dfrac{2\bar{\theta} s_2 \Delta s}{4s_2 - s_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1^*(s) = \dfrac{\bar{\theta} s_2}{4s_2 - s_1}, \\ D_2^*(s) = \dfrac{2\bar{\theta} s_2}{4s_2 - s_1}. \end{cases}$$

Прибыли фирм в равновесии достигают следующих величин:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(s) = \Pi_1\left(p^*(s), s\right) = \dfrac{\bar{\theta}^2 s_1 s_2 \Delta s}{(4s_2 - s_1)^2} - c(s_1) - F(\bar{s}_1), \\ \Pi_2^*(s) = \Pi_2\left(p^*(s), s\right) = \dfrac{4\bar{\theta}^2 s_2^2 \Delta s}{(4s_2 - s_1)^2} - c(s_2) - F(\bar{s}_2). \end{cases}$$

Выбор оптимального качества в случае квадратичных затрат. Рассмотрим сначала случай покрытия рынка. С учетом ранее полученных результатов имеем, что функции прибыли фирм по производству продукции, которая будет продаваться по оптимальным ценам, выглядят так:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(s) = \dfrac{\left(\bar{\theta} - 2\underline{\theta}\right)^2 \Delta s}{9} - c(s_1) - F(\bar{s}_1), \\ \Pi_2^*(s) = \dfrac{\left(2\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)^2 \Delta s}{9} - c(s_2) - F(\bar{s}_2). \end{cases}$$

Определим оптимальные качества продукции с помощью условия экстремума. Напомним также, что функции производственных затрат считаются квадратичными, т. е. $c(s_i) = ks_i^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1^*}{\partial s_1} = -\dfrac{\left(\bar{\theta} - 2\underline{\theta}\right)^2}{9} - 2ks_1 < 0, \\ \dfrac{\partial \Pi_2^*}{\partial s_2} = \dfrac{\left(2\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{9} - 2ks_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что если $\frac{(2\bar{\theta}-\underline{\theta})^2}{18k} \in [\underline{s}, \bar{s}_2]$, то

$$\begin{cases} s_1^* = \underline{s}, \\ s_2^* = \frac{(2\bar{\theta}-\underline{\theta})^2}{18k}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\bar{s}) = \Pi_1^*\left(s^*(\bar{s}), \bar{s}\right) = \frac{\left(\bar{\theta}-2\underline{\theta}\right)^2}{9}\left(\frac{(2\bar{\theta}-\underline{\theta})^2}{18k} - \underline{s}\right) - k\underline{s}^2 - F(\bar{s}_1), \\ \Pi_2^*(\bar{s}) = \Pi_2^*\left(s^*(\bar{s}), \bar{s}\right) = \frac{\left(2\bar{\theta}-\underline{\theta}\right)^4}{324k} - \frac{(2\bar{\theta}-\underline{\theta})^2}{9}\underline{s} - F(\bar{s}_2). \end{cases}$$

Если же $\frac{(2\bar{\theta}-\underline{\theta})^2}{18k} > \bar{s}_2$, то

$$\begin{cases} s_1^* = \underline{s}, \\ s_2^* = \bar{s}_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\bar{s}) = \Pi_1^*\left(s^*(\bar{s}), \bar{s}\right) = \frac{\left(\bar{\theta}-2\underline{\theta}\right)^2}{9}(\bar{s}_2 - \underline{s}) - k\underline{s}^2 - F(\bar{s}_1), \\ \Pi_2^*(\bar{s}) = \Pi_2^*\left(s^*(\bar{s}), \bar{s}\right) = \frac{(2\bar{\theta}-\underline{\theta})^2}{9}(\bar{s}_2 - \underline{s}) - k\bar{s}_2^2 - F(\bar{s}_2). \end{cases}$$

Если $\frac{(2\bar{\theta}-\underline{\theta})^2}{18k} < \underline{s}$, то $\Pi_i^* < 0$, что недопустимо.

Теперь исследуем случай отсутствия покрытия рынка. Аналогично получаем, что функции прибыли фирм по производству продукции, которая будет продаваться по оптимальным ценам, имеют вид:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(s) = \frac{\bar{\theta}^2 s_1 s_2 \Delta s}{(4s_2 - s_1)^2} - c(s_1) - F(\bar{s}_1), \\ \Pi_2^*(s) = \frac{4\bar{\theta}^2 s_2^2 \Delta s}{(4s_2 - s_1)^2} - c(s_2) - F(\bar{s}_2). \end{cases}$$

Определим оптимальные качества продукции с помощью условия первого порядка. Учтем при этом, что функции производственных затрат являются квадратичными, т. е. $c(s_i) = ks^2$, $k > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_1^*}{\partial s_1} = \frac{\bar{\theta}^2 s_2^2}{(4s_2 - s_1)^3}(4s_2 - 7s_1) - 2ks_1 = 0, \\ \frac{\partial \Pi_2^*}{\partial s_2} = \frac{4\bar{\theta}^2 s_2}{(4s_2 - s_1)^3}(4s_2^2 - 3s_1 s_2 + 2s_1^2) - 2ks_2 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы приравниваем правые части, получаем уравнение третьей степени:

$$4s_2^3 - 23s_2^2 s_1 + 12s_2 s_1^2 - 8s_1^3 = 0.$$

Сделаем замену: $s_2 = \mu s_1$. Решением уравнения является $\mu = 5{,}2512$.

Тогда $s_2 = 5{,}2512 s_1$. Подставляем полученное выражение в условия экстремума и получаем:

1. Если значения оптимальных качеств производимой фирмами продукции лежат в промежутке $s_i^* \in [\underline{s}, \overline{s}_i]$, то

$$\begin{cases} s_1^* = 0{,}0241\dfrac{\overline{\theta}^2}{k}, \\ s_2^* = 0{,}1266\dfrac{\overline{\theta}^2}{k}. \end{cases} \tag{7}$$

Поэтому равновесные прибыли фирм таковы:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\overline{s}) = \Pi_1^*\left(s^*(\overline{s}), \overline{s}\right) = 0{,}0125\dfrac{\overline{\theta}^4}{k} - F(\overline{s}_1), \\ \Pi_2^*(\overline{s}) = \Pi_2^*\left(s^*(\overline{s}), \overline{s}\right) = 0{,}0123\dfrac{\overline{\theta}^4}{k} - F(\overline{s}_2). \end{cases}$$

2. Если $s_1^* < \underline{s}$, $s_2^* \in [\underline{s}, \overline{s}_2]$, то $s_1^{**} = \underline{s}$. Найдем оптимальное качество продукции второй фирмы из условия первого порядка:

$$\frac{\partial \Pi_2^*}{\partial s_2} = \frac{4\overline{\theta}^2 s_2}{(4s_2 - \underline{s})^3}(4s_2^2 - 3s_2\underline{s} + 2\underline{s}^2) - 2ks_2 = 0\,.$$

Произведем замену: $s_2 = \mu\underline{s}$. Тогда получим уравнение третьей степени относительно μ:

$$-64k\underline{s}^3\mu^3 + (8\overline{\theta}^2\underline{s}^2 + 48k\underline{s}^3)\mu^2 - (6\overline{\theta}^2\underline{s}^2 + 12k\underline{s}^3)\mu + 4\overline{\theta}^2\underline{s}^2 + k\underline{s}^3 = 0.$$

Решение данного уравнения осуществим в численном виде. Будем считать известными максимальные цены на продукцию самого низкого качества, которые готовы платить потребители с самым высоким и низким показателями склонности к качеству (табл. 1). Предположим, что $k = 0{,}02$.

Коэффициенты при соответствующих степенях в уравнении, полученные при таких начальных данных, приведены в табл. 2.

Таблица 1

Начальные данные

$\theta\underline{s}$	$\bar{\theta}\underline{s}$	$\underline{s}$
350	420	70
300	367	67
320	388	68
290	355	65
350	410	60

Таблица 2

Коэффициенты уравнения и его решение

μ^3	μ^2	μ^1	μ^0	μ
–439 040	1 740 480	–1 140 720	712 460	3,3304
–384 977	1 366 244	–880 317	544 771,3	2,9339
–402 473	1 506 207	–978 728	608 464,6	3,118
–351 520	1 271 840	–822 060	509 592,5	2,9996
–276 480	1 552 160	–1 060 440	676 720	4,9376

Решение задачи нахождения оптимального качества производимой продукции представим в табл. 3.

Таблица 3

Результаты вычислений

s_1^{**}	s_2^{**}	Π_1^*	Π_2^*
70	233,128	30,82294	629,1544
67	196,5713	9,185541	388,6145
68	212,024	18,61086	486,4417
65	194,974	11,63705	393,1936
60	296,256	82,93263	1304,629

3. Если $s_2^* > \bar{s}_2$, $s_1^* \in [\underline{s}, \bar{s}_1]$, то $s_2^{**} = \bar{s}_2$. Найдем оптимальное качество продукции второй фирмы из условия первого порядка:

$$\frac{\partial \Pi_1^*}{\partial s_1} = \frac{\bar{\theta}^2 \bar{s}_2^{\,2}}{(4\bar{s}_2 - s_1)^3}(4\bar{s}_2 - 7s_1) - 2ks_1 = 0.$$

Сделаем замену: $s_1 = \mu \bar{s}_2$. Тогда получим уравнение четвертой степени относительно μ:

$$2k\bar{s}_2^{\,3}\mu^4 - 24k\bar{s}_2^{\,3}\mu^3 + 96k\bar{s}_2^{\,3}\mu^2 - (7\bar{\theta}^2\bar{s}_2^{\,2} + 128k\bar{s}_2^{\,3})\mu + 4\bar{\theta}^2\bar{s}_2^{\,2} = 0.$$

Решение этого уравнения также осуществим в численном виде. Будем считать, что нам известны максимальные цены, которые готовы заплатить потребители с самым низким и самым высоким показателем склонности к качеству за товар самого высокого качества. Отсюда получаем правую границу диапазона качества $\bar{s}_2$ (табл. 4).

Таблица 4

Начальные данные

$\underline{\theta}\bar{s}_2$	$\bar{\theta}\bar{s}_2$	$\bar{s}_2$
600	720	120
655	752	97
700	800	100
755	930	175
780	930	150

Коэффициенты при соответствующих степенях в уравнении, полученные при таких начальных данных, приведем в табл. 5.

Таблица 5

Коэффициенты уравнения и его решение

μ^4	μ^3	μ^2	μ^1	μ^0	μ
69 120	–829 440	3 317 760	–8 052 480	2 073 600	0,2896
36 507	–438 083	1 752 332	–6 294 971	2 262 016	0,3995
40 000	–480 000	1 920 000	–7 040 000	2 560 000	0,4038
214 375	–2 572 500	10 290 000	–19 774 300	3 459 600	0,1935
135 000	–1 620 000	6 480 000	–14 694 300	3 459 600	0,2642

Решение задачи нахождения оптимального качества производимой продукции представим в табл. 6.

Таблица 6

Результаты вычислений

s_1^{**}	s_2^{**}	Π_1^*	Π_2^*
34,752	120	40,40304	603,6722
38,7515	97	77,85318	892,0378
40,38	100	86,52719	980,1692
33,8625	175	30,29724	487,8746
39,63	150	48,90488	765,9821

4. Если оба значения оптимальных качеств продукции, изготавливаемой фирмами-конкурентами, вышли за границы интервала, т. е. $s_1^* < \underline{s}$, $s_2^* > \overline{s}_2$, то

$$\begin{cases} s_1^{**} = \underline{s}, \\ s_2^{**} = \overline{s}_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\overline{s}) = \Pi_1^*\left(s^{**}(\overline{s}), \overline{s}\right) = \dfrac{\overline{\theta}^2 \overline{s}_2 \underline{s}(\overline{s}_2 - \underline{s})}{(4\overline{s}_2 - \underline{s})^2} - k\underline{s}^2 - F(\overline{s}_1), \\ \Pi_2^*(\overline{s}) = \Pi_2^*\left(s^{**}(\overline{s}), \overline{s}\right) = \dfrac{4\overline{\theta}^2 \overline{s}_2{}^2(\overline{s}_2 - \underline{s})}{(4\overline{s}_2 - \underline{s})^2} - k\overline{s}_2{}^2 - F(\overline{s}_2). \end{cases}$$

5. Если s_1^*, $s_2^* < \underline{s}$, то $\Pi_i^* < 0$, что недопустимо.

Формирование диапазонов качества производимой продукции. Рассмотрим случай покрытия рынка. С учетом результатов (см. подраздел «Выбор оптимального качества в случае квадратичных затрат») получаем, что прибыль фирм по производству продукции оптимального качества, которая будет продаваться по оптимальным ценам, принимает следующие значения в зависимости от соотношения между параметрами модели:

Если $\dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{18k} \in [\underline{s}, \overline{s}_2]$, то:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\overline{s}) = \dfrac{\left(\overline{\theta} - 2\underline{\theta}\right)^2}{9}\left(\dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{18k} - \underline{s}\right) - k\underline{s}^2 - F(\overline{s}_1), \\ \Pi_2^*(\overline{s}) = \dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^4}{324k} - \dfrac{(2\overline{\theta} - \underline{\theta})^2}{9}\underline{s} - F(\overline{s}_2). \end{cases}$$

Если $\dfrac{\left(2\bar{\theta}-\underline{\theta}\right)^2}{18k} > \bar{s}_2$, то

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\bar{s}) = \dfrac{\left(\bar{\theta}-2\underline{\theta}\right)^2}{9}(\bar{s}_2-\underline{s}) - k\underline{s}^2 - F(\bar{s}_1), \\ \Pi_2^*(\bar{s}) = \dfrac{\left(2\bar{\theta}-\underline{\theta}\right)^2}{9}(\bar{s}_2-\underline{s}) - k\bar{s}_2^{\,2} - F(\bar{s}_2). \end{cases}$$

Иначе, если $\dfrac{\left(2\bar{\theta}-\underline{\theta}\right)^2}{18k} < \underline{s}$, то $\Pi_i^* < 0$, что недопустимо.

Определим теперь уровень инвестиций и диапазоны качества производимой фирмами-конкурентами продукции. Для этого воспользуемся условием первого порядка. Рассмотрим квадратичный вид функций инвестиций в диапазоны качества продукции, т. е. $F(\bar{s}_i) = b\left(\bar{s}_i - \bar{s}_0\right)^2$, $b > 0$.

Если $\dfrac{\left(2\bar{\theta}-\underline{\theta}\right)^2}{18k} \in [\underline{s}, \bar{s}_2]$, то:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1^*}{\partial \bar{s}_1} = -2b(\bar{s}_1 - \bar{s}_0) \le 0, \\ \dfrac{\partial \Pi_2^*}{\partial \bar{s}_2} = -2b(\bar{s}_2 - \bar{s}_0) \le 0. \end{cases}$$

Понятно, что функции прибыли фирм являются убывающими по диапазонам качества изготавливаемой продукции. Значит, фирмам невыгодно производить инвестиции в диапазон качеств:

$$\begin{cases} \bar{s}_1^* = \bar{s}_0, \\ \bar{s}_2^* = \bar{s}_0. \end{cases}$$

Если же $\dfrac{\left(2\bar{\theta}-\underline{\theta}\right)^2}{18k} > \bar{s}_2$, то:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1^*}{\partial \bar{s}_1} = -2b(\bar{s}_1 - \bar{s}_0) < 0, \\ \dfrac{\partial \Pi_2^*}{\partial \bar{s}_2} = \dfrac{\left(2\bar{\theta}-\underline{\theta}\right)^2}{9} - 2k\bar{s}_2 - 2b(\bar{s}_2 - \bar{s}_0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial \bar{s}_1^{\,2}} < 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial \bar{s}_2^{\,2}} < 0, \end{cases} \tag{8}$$

т. е. решение системы (8) доставляет максимум функции прибыли фирмы.

Тогда:

1. Если нижеуказанные оптимальные диапазоны качеств производимой фирмами продукции $\overline{s}_2^* \in [\overline{s}_0, \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}]$, то

$$\begin{cases} \overline{s}_1^* = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^* = \dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{18(k+b)} + \dfrac{b}{k+b}\overline{s}_0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^*\left(\overline{s}^*\right) = \dfrac{\left(\overline{\theta} - 2\underline{\theta}\right)^2}{9}\left(\dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{18(k+b)} + \dfrac{b}{k+b}\overline{s}_0 - \underline{s}\right) - k\underline{s}^2, \\ \Pi_2^*\left(\overline{s}^*\right) = \dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{9}\left(\dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{18(k+b)} + \dfrac{b}{k+b}\overline{s}_0 - \underline{s}\right) - \\ - \dfrac{k}{(k+b)^2}\left(\dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{18} + b\overline{s}_0\right)^2 - \dfrac{b}{(k+b)^2}\left(\dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{18} - k\overline{s}_0\right)^2. \end{cases}$$

2. Если $\overline{s}_2^* > \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}$, то наблюдается случай максимальной дифференциации по диапазонам качества производимой продукции:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^{**} = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^{**} = \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^*\left(\overline{s}^{**}\right) = \dfrac{\left(\overline{\theta} - 2\underline{\theta}\right)^2}{9}\left(\overline{s}_0 - \underline{s}\right) - k\underline{s}^2 - b\overline{s}_0^2, \\ \Pi_2^*\left(\overline{s}^{**}\right) = \dfrac{\left(2\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)^2}{9}\left(\overline{s}_0 + \Delta\overline{s} - \underline{s}\right) - k\left(\overline{s}_0 + \Delta\overline{s}\right)^2 - b(\Delta\overline{s})^2. \end{cases}$$

3. Если $\overline{s}_0^* < \overline{s}_0$, то:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^{**} = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^{**} = \overline{s}_0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случай отсутствия покрытия рынка. С учетом результатов, представленных ранее (см. подраздел «Выбор оптимального качества в случае квадратичных затрат»), получаем, что функции прибыли фирм по производству продукции при различных соотношениях между параметрами модели принимают следующие значения:

1. Если значения оптимального качества производимой фирмами продукции $s_i^* \in [\underline{s}, \overline{s}_i]$, где

$$\begin{cases} s_1^* = 0{,}0241\dfrac{\overline{\theta}^2}{k}, \\ s_2^* = 0{,}1266\dfrac{\overline{\theta}^2}{k}, \end{cases} \tag{10}$$

то

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\overline{s}) = 0{,}0125\dfrac{\overline{\theta}^4}{k} - F(\overline{s}_1), \\ \Pi_2^*(\overline{s}) = 0{,}0123\dfrac{\overline{\theta}^4}{k} - F(\overline{s}_2). \end{cases}$$

И в связи с тем что функции прибыли убывают по правой границе диапазона, получаем:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^* = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^* = \overline{s}_0. \end{cases}$$

2. Если $s_1^* < \underline{s}$, $s_2^* \in [\underline{s}, \overline{s}_2]$, то:

$$\begin{cases} s_1^{**} = \underline{s}, \\ s_2^{**} = \mu\underline{s}. \end{cases}$$

Учитывая выражения

$$\begin{cases} \Pi_1^*(s) = \dfrac{\overline{\theta}^2 s_1 s_2 \Delta s}{(4s_2 - s_1)^2} - c(s_1) - F(\overline{s}_1), \\ \Pi_2^*(s) = \dfrac{4\overline{\theta}^2 s_2^2 \Delta s}{(4s_2 - s_1)^2} - c(s_2) - F(\overline{s}_2), \end{cases}$$

получаем, что функции прибыли фирм по производству товаров такого качества имеют вид:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\overline{s}) = \dfrac{\overline{\theta}^2 \mu(\mu - 1)}{(4\mu - 1)^2}\underline{s} - k\underline{s}^2 - b(\overline{s}_1 - \overline{s}_0)^2, \\ \Pi_2^*(\overline{s}) = \dfrac{4\overline{\theta}^2 \mu^2(\mu - 1)}{(4\mu - 1)^2}\underline{s} - k\mu^2\underline{s}^2 - b(\overline{s}_2 - \overline{s}_0)^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \overline{s}_1^* = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^* = \overline{s}_0. \end{cases}$$

3. Если $s_2^* > \overline{s}_2$, $s_1^* \in [\underline{s}, \overline{s}_1]$, то:

$$\begin{cases} s_1^{**} = \mu\overline{s}_2, \\ s_2^{**} = \overline{s}_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Pi_1^*(\overline{s}) = \dfrac{\overline{\theta}^2\mu(1-\mu)}{(4-\mu)^2}\overline{s}_2 - k\mu^2\overline{s}_2^2 - b(\overline{s}_1 - \overline{s}_0)^2, \\ \Pi_2^*(\overline{s}) = \dfrac{4\overline{\theta}^2(1-\mu)}{(4-\mu)^2}\overline{s}_2 - k\overline{s}_2^2 - b(\overline{s}_2 - \overline{s}_0)^2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1^*}{\partial \overline{s}_1} = -2b(\overline{s}_1 - \overline{s}_0), \\ \dfrac{\partial \Pi_2^*}{\partial \overline{s}_2} = \dfrac{4\overline{\theta}^2(1-\mu)}{(4-\mu)^2} + 2b\overline{s}_0 - 2(k+b)\overline{s}_2. \end{cases}$$

Поэтому

- если нижеуказанные оптимальные диапазоны качеств производимой фирмами продукции $\overline{s}_2^* \in [\overline{s}_0, \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}]$, то:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^* = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^* = \dfrac{1}{(k+b)}\left(\dfrac{2\overline{\theta}^2(1-\mu)}{(4-\mu)^2} + b\overline{s}_0\right). \end{cases}$$

В табл. 7 приведен пример нахождения оптимальных диапазонов качества продукции фирм, считая, что $\overline{s}_0 = 80$.

Таблица 7

Численный пример

μ	$\overline{s}_1^*$	$\overline{s}_2^*$
0,2896	80	187,2999
0,3995	80	119,3238
0,4038	80	126,7262
0,1935	80	137,3523
0,2642	80	190,7886

- если $\overline{s}_2^* > \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}$, то наблюдается случай максимальной дифференциации по диапазонам качества производимой продукции:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^{**} = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^{**} = \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}. \end{cases}$$

- если $\overline{s}_1^* < \overline{s}_0$, то:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^{**} = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^{**} = \overline{s}_0. \end{cases}$$

- если оба значения оптимальных качеств вышли за границы интервала $s_1^* < \underline{s}$, $s_2^* > \overline{s}_2$, то:

$$\begin{cases} \Pi_1^*(\overline{s}) = \dfrac{\overline{\theta}^2 \overline{s}_2 \underline{s}(\overline{s}_2 - \underline{s})}{(4\overline{s}_2 - \underline{s})^2} - k\underline{s}^2 - F(\overline{s}_1), \\ \Pi_2^*(\overline{s}) = \dfrac{4\overline{\theta}^2 \overline{s}_2^2(\overline{s}_2 - \underline{s})}{(4\overline{s}_2 - \underline{s})^2} - k\overline{s}_2^2 - F(\overline{s}_2). \end{cases}$$

Тогда условие первого порядка примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1^*}{\partial \overline{s}_1} = -2b(\overline{s}_1 - \overline{s}_0) < 0, \\ \dfrac{\partial \Pi_2^*}{\partial \overline{s}_2} = \dfrac{4\overline{\theta}^2 \overline{s}_2}{(4\overline{s}_2 - \underline{s})^3}(4\overline{s}_2^2 - 3\overline{s}_2\underline{s} + 2\underline{s}^2) - 2k\overline{s}_2 - 2b(\overline{s}_2 - \overline{s}_0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Сделаем замену $\overline{s}_2 = \mu \underline{s}$. Тогда второе уравнение системы (11) примет вид:

$$2\overline{\theta}^2(4\mu^3 - 3\mu^2 + 2\mu) - \mu\underline{s}(k + b)(4\mu - 1)^3 + b\overline{s}_0(4\mu - 1)^3 = 0.$$

Предположим, что мы знаем максимальные цены, которые готовы заплатить потребители с самым низким и самым высоким показателем склонности к качеству за товар самого низкого качества (табл. 8). Имея эту информацию, получаем значение самого низкого качества товара из заданного диапазона.

Таблица 8

Начальные данные

$\underline{\theta}\underline{s}$	$\overline{\theta}\underline{s}$	$\underline{s}$
350	410	60
300	361	61
320	382	62
291	352	61
350	410	60

Коэффициенты при соответствующих степенях в уравнении, полученные при таких начальных данных, приведены в табл. 9.

Таблица 9

Коэффициенты уравнения и его решение

μ^4	μ^3	μ^2	μ^1	μ^0	μ
115,2	–511,156	347,3667	194,5778	0,8	3,4061
117,12	–419,225	277,3387	147,8624	0,8	2,3302
119,04	–444,172	294,969	159,586	0,8	2,5565
117,12	–405,429	266,9915	140,9643	0,8	2,1108
115,2	–511,156	347,3667	194,5778	0,8	3,4061

Решая систему относительно диапазонов качества производимой продукции с учетом начальных данных, представленных в табл. 8, получаем следующий результат, отраженный в табл. 10.

Таблица 10

Результаты вычислений

s_1^{**}	s_2^{**}	Π_1^*	Π_2^*
80	204,366	72,06751	972,8551
80	142,1422	21,2255	448,7879
80	158,503	33,14796	561,0547
80	128,7588	11,54449	370,4646
80	204,366	72,06751	972,8551

Таким образом, когда полученный оптимальный диапазон качества продукции второй фирмы $\overline{s}_2^{**}$; то при:

- $\overline{s}_2^{**} \in [\overline{s}_0,\ \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}]$, получаем решение, представленное в табл. 10;
- $\overline{s}_2^{**} > \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}$, наблюдается случай максимальной дифференциации по диапазонам качества производимой продукции:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^{***} = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^{***} = \overline{s}_0 + \Delta\overline{s}; \end{cases}$$

- $\overline{s}_2^{**} < \overline{s}_0$, то:

$$\begin{cases} \overline{s}_1^{***} = \overline{s}_0, \\ \overline{s}_2^{***} = \overline{s}_0; \end{cases}$$

- $s_1^*, s_2^* < \underline{s}$, то $\Pi_i^* < 0$, что недопустимо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследования показывают, что решения фирм по оценке требуемого качества производимой продукции в значительной степени зависят от состояния рынка, которое в нашей модели определяется значениями исходных параметров модели.

Предложенный в работе подход к оценке прибыльности работы фирм, конкурирующих на рынке по качеству однородной продукции, может быть применен в различных областях: в производственной сфере, в сфере услуг и т. д.

Подводя итоги проведенного исследования, можно отметить, что мы получили решение предлагаемых теоретико-игровых моделей при разумных значениях параметров моделей. На основе полученных результатов имеется возможность количественно оценить следующие величины в условиях отраслевой конкуренции:

- количественную шкалу оценки качества производимой продукции;
- количественную оценку требуемого качества производимого товара для каждой конкурирующей фирмы;
- цены на товары в условиях конкуренции и дифференциации по качеству товара;
- уровень спроса на товары, в том числе в равновесии;
- равновесную прибыль фирм.

Литература

Зенкевич Н. А. Модель конкуренции на рынке выпускников ВУЗов в условиях дифференциации по качеству // Математические модели и методы в рыночной экономике. СПб.: МБИ, 2003.

Куштавкин Д. Значение категории качества при формировании конкурентной стратегии // Стандарты и качество. 2007. № 6.

Математические исследования в экономике / Под ред. Н. А. Зенкевича, Д. В. Кузютина. СПб.: МБИ, 2006. С. 37–47.

Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. Т. 2. СПб.: Экономическая школа, 2000.

Aoki R., Pursa Th. J. Sequential Versus Simultaneous Choice with Endogenous Quality // Intenational Journal of Industrial Organization. 1996. Vol. 15. P. 103–121.

Bester H. Quality Uncertainty Mitigates Product Differentiation // The Rand Journal of Economics. 1998. Vol. 29. Winter. N 4. P. 828–844.

Choi Chong Ju, Shin Hyun Song. A Comment on a Model of Vertical Product Differentiation // The Journal of Industrial Economics. 1992. Vol. 40. June. N 2. P. 229–231.

Coibion O., Einav L., Hallak J. C. Equilibrium Demand Elasticities across Quality Segments. // International Journal of Industrial Organization. 2007. Vol. 25. February. N 1. P. 13–30.

Kuhn M. Minimum Quality Standards and Market Dominance in Vertically Differentiated Duopoly // The Journal of Industrial Economics. 2007. Vol. 25. April. N 2. P. 275–290.

Lehmann-Grube U. Strategic Choice of Quality When Quality is Costly: The Persistence of the High-Quality Advantage // The Rand Journal of Economics. 1997. Vol. 28. Summer. N 2. P. 372–384.

Liua Q., Serfes K. Imperfect Price Discrimination in a Vertical Differentiation Model // International Journal of Industrial Organization. 2005. Vol. 23. June. N 5–6. P. 341–354.

Lutz S., Lyon Th. P., Maxwell J. W. Quality Leadership When Regulatory Standards are Forthcoming // Journal of Industrial Economics. 2000. September. Vol. 48. N 3. P. 331–348.

Motta M. Endogenous Quality Choice: Price vs. Quantity Competition // Journal of Industrial Economics. 1993. Vol. 41. June. N 2. P. 113–131.

Neumann J. von, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, Princeton University Press, 1944. (Рус. пер.: *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.)

Статья поступила в редакцию 11 октября 2007 г.