Вестник СПбГУ. Сер. 8. 2005. Вып. 3

А. В. Игнатов

ОПЫТ УЧЕТА ПЕРЕМЕННЫХ И ПОСТОЯННЫХ ЗАТРАТ ПРИ ПРИНЯТИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Представленная в статье математическая модель позволяет найти интервал безубыточности (Break even interval), в пределах которого существует точка максимальной прибыли. Алгоритм модели предполагает: установление зависимости покупательского спроса от цен; определение постоянных и переменных затрат и поиск интервала безубыточности; нахождение функции зависимости прибыли от цены и нахождение максимума данной функции.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Показатели постоянных и переменных затрат (в англоязычной литературе *fixed cost* и *variable cost*, соответственно), используемые в управленческом анализе, в настоящее время являются уже настолько привычными, что удивить ими кого-либо трудно [Стоянова, 2003]. Несмотря на это, их применению на практике мешает то обстоятельство, что учетные регистры, принятые как в зарубежном, так и в отечественном бухгалтерском учете, не совсем удобны в плане группировки затрат предприятия на постоянные и переменные и не позволяют произвести данное деление с желаемой точностью. В результате повышенный интерес к этим показателям, имевший место в первой половине 1990-х гг., постепенно сменился если не разочарованием, то заметным охлаждением. Однако идея постоянных и переменных затрат еще не исчерпала себя окончательно; в частности, изучая влияние спроса покупателей на цены, издержки и прибыль организаций, автору удалось совместить общеизвестные эконометрические приемы в одной модели, суть которой сводится к следующему.

На первом этапе строится тривиальная линейная модель зависимости спроса покупателей от цены на товар, опирающаяся на данные за два смежных периода времени.

На втором этапе отыскиваются постоянные и переменные затраты. Как известно, проблема состоит в том, что строгого метода разделения затрат фирмы на постоянные и переменные не существует, поэтому на практике оно часто производится несколько прямолинейно. Считается, что расходы, отнесенные на счет 20 «Основное производство» (или в торговле — на счет 44 «Расходы на продажу»), представляют собой переменные затраты, а расходы, первоначально попадающие на счет 26 «Общехозяйственные расходы» и уже далее на счет 20 или 44, есть постоянные затраты. Не вдаваясь в детали, отметим, что недостатки, присущие такому разделению по бухгалтерскому принципу, слишком очевидны, а потому экономисты стараются уйти от этого способа и модифицировать его, стремясь провести разделительную линию между затратами более гибко (или же при наличии управленческого учета используют его данные). Между тем, если исходить из гипотезы о том, что постоянные и переменные затраты предприятия суть категории объективные, существующие независимо от способов ведения учета, должны быть и математические методы, которые позволяют отыскать грань, объективно существующую между ними.

Наконец, на третьем этапе результаты, полученные ранее, сводятся воедино в виде уравнения, дифференцирование которого дает возможность отыскать цену, максимизирующую прибыль фирмы, что на сегодняшний день более чем актуально.

Обратимся к математической стороне модели. Предположим, что деятельность фирмы характеризуется следующими показателями (табл. 1).

Таблица 1

Показатели, необходимые для анализа деятельности фирмы

Смежные периоды времени, равные Δt ($\Delta t \to 0$)	**Физический объем продаж товаров, единицы**	**Цена товаров, руб.**	**Средняя себестоимость единицы товаров (удельная себестоимость), руб.**
Первый	y_1	x_1	z_1
Второй	y_2	x_2	z_2

Допустим, что физический объем продаж товаров $y(x)$ является линейной функцией от цены товаров x, т. е. мы имеем следующую зависимость спроса от цены:

$$y(x) = kx + b, \quad (1)$$

где $y(x)$ — физический объем продаж товаров (в физических единицах); x — цена товара (в руб. за единицу); k и b — коэффициенты, связывающие между собой физический объем продаж и цену.

Согласно данным табл. 1, для коэффициентов k и b в этом случае справедливо, что:

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{и} \quad b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 .$$

Если предположение о том, что покупательский спрос зависит от цены (а он часто таков), верно, то при прочих равных условиях повышение цен приводит к сокращению спроса, а снижение цен, наоборот, к его расширению. Это означает, что коэффициент k в выражении (1) будет отрицателен, а коэффициент b — положителен (рис. 1).

Почему предполагается, что зависимость (1) линейна, ведь экономические процессы, как правило, нелинейны [Ланге, Банасиньский, 1971]?

Действительно, экономическим процессам на длительных промежутках времени свойственна нелинейность, а потому разумными временными рамками для такого рода анализа будут данные за два смежных периода времени. Последнее означает, что функция $y(x)$ может быть построена на основе временного ряда, состоящего из двух точек (рис. 1), и следовательно, при отсутствии иных экзогенных предположений о характере функции $y(x)$ линейная функция окажется единственным претендентом для математической формализации спроса от цены.

Если из года в год строить такого рода зависимости для двух последних лет (вероятнее всего, каждый год коэффиценты k и b будут разными) и соединять их последовательно между собой, то можно получить в итоге кусочно-линейную функцию (сплайн) [Корн, Корн, 1984]. Эта функция по мере роста цен или, наоборот, их снижения будет обладать свойством насыщения [Поллард, 1982]. При достижении определенного уровня цены — как снизу, так и сверху — данная зависимость станет нелинейной, когда объем продаж или очень мало зависит, или уже практически не зависит от изменения цены. Однако парадокс состоит в том, что эту кусочно-линейную функцию в чистом виде нельзя будет применять в расчетах. Собранная из кусков, полученных в разные годы, она будет и «кусочно-достоверной», т. е. каждый ее линейный кусок будет справедлив лишь для того отдельно взятого года, когда он был получен (другими словами, эта функция на свой лад исторична и справедлива для отрезка времени, который условно можно принять равным $\Delta t \to 0$).

В случае если зависимость себестоимости единицы товара от физического объема продаж формируется как функция переменных затрат (*variable cost*) и постоянных затрат (*fixed cost*), она будет выглядеть так:

$$z(y) = \frac{VC + FC}{y(x)} = vc + \frac{FC}{y(x)}, \qquad (2)$$

где $z(y)$ — удельная себестоимость товаров (в руб. за единицу товара); FC — постоянные затраты фирмы (руб.); VC — переменные затраты фирмы (руб.); vc — удельные переменные затраты товаров (руб. за единицу товара).

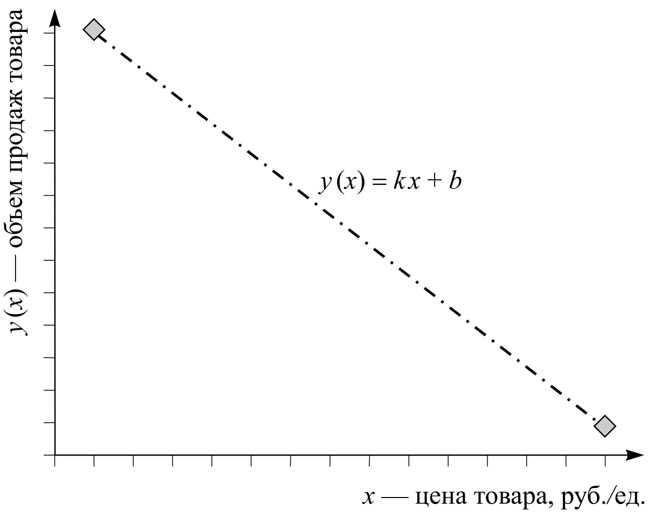

Рис. 1. Зависимость объема продаж от цены

Примечание: на рис. 1–3 изображенные на концах графиков точки соответствуют первому и второму периодам табл. 1.

Согласно данным табл. 1, применительно к переменным FC и vc справедливы равенства:

$$FC = \frac{z_1 - z_2}{\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}} \text{ и } vc = z_1 - \frac{z_1 - z_2}{1 - \frac{y_1}{y_2}}.$$

Если функцию зависимости себестоимости единицы товара $z(y)$ от объема продаж $y(x)$ изобразить графически (рис. 2), обнаруживается, что с ростом продаж снижается удельная себестоимость: иначе говоря, наблюдается эффект масштаба производства.

Знание величин постоянных затрат FC и удельных переменных затрат vc, а также цены товара x позволяет отыскать так называемую точку безубыточности, рассчитываемую обычно по следующей формуле:

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - vc}, \qquad (3)$$

где $y_{\min}$ — безубыточный объем продаж товаров (в физических единицах).

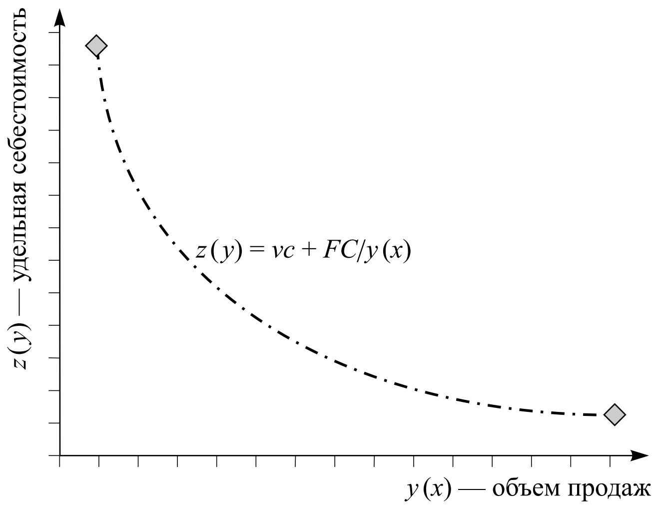

Рис. 2. Зависимость удельной себестоимости от объема продаж

Но поскольку объем продаж $y(x)$ и цена x связаны линейной зависимостью в соответствии с выражением (1), это означает, что общепринятую формулу нахождения точки безубыточности можно модифицировать. В частности, цена x может быть представлена в виде обратной функции от объема продаж $y(x)$. Поэтому минимальный объем продаж $y_{\min}$, при котором прибыль равна нулю, составит:

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - vc} = \frac{FC}{\frac{y_{\min} - b}{k} - vc}. \tag{3.1}$$

Квадратное уравнение, решаемое относительно $y_{\min}$, согласно правилам математики, может иметь одно, два или вовсе не иметь решений. Случай с двумя решениями наиболее интересен, так как на основе полученных данных можно установить две цены — нижнюю и верхнюю, — образующие не точку, а *интервал безубыточности*. Внутри последнего фирма может отыскать ту цену, которая обеспечит ей максимум прибыли.

Если в выражение (2) подставить вместо $y(x)$ равенство (1), то можно перейти непосредственно к зависимости удельной себестоимости $z(x)$ от цены товара x:

$$z(x) = vc + \frac{FC}{k \cdot x + b}, \tag{4}$$

где $z(x)$ — удельная себестоимость товаров (в руб. за единицу товара).

Построенный для зависимости (4) график наглядно показывает, как в условиях эластичного спроса снижение цены приводит к снижению себестоимости единицы товара (рис. 3).

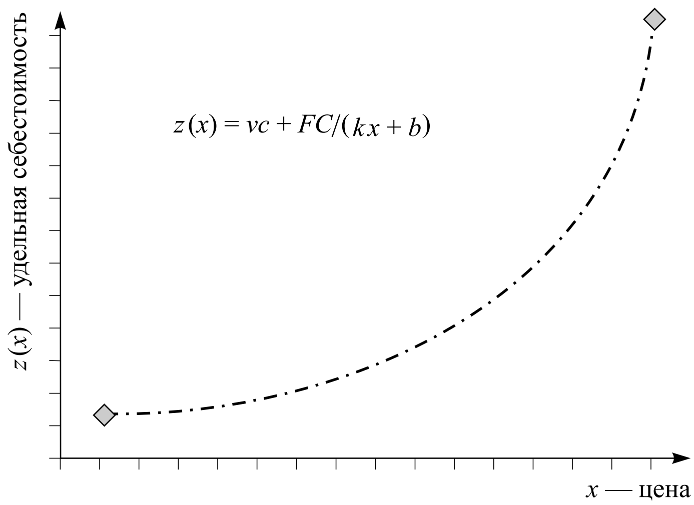

Рис. 3. Зависимость удельной себестоимости от цены

Далее, зная зависимость объема продаж $y(x)$ и удельной себестоимости $z(x)$ от цены товара x, выводится функция зависимости прибыли $P(x)$:

$$P(x) = y(x) \cdot [x - z(x)] = k \cdot x^2 + (b - k \cdot vc) \cdot x - (b \cdot vc + FC), \qquad (5)$$

где $P(x)$ — прибыль от продажи товаров (тыс. руб.).

Поскольку коэффициент k при эластичном спросе отрицателен, то функция прибыли $P(x)$ имеет максимум. Графическая интерпретация выражения (5), представленная на рис. 4, показывает не только этот максимум, означающий, что есть некоторая цена, обеспечивающая максимум прибыли для фирмы, но и границы *интервала безубыточности*, о чем говорилось выше (в виде точек пересечения графика с осью абсцисс).

Для максимизации прибыли $P(x)$ отыскивается первая производная функционала (5):

$$P'(x) = 2 \cdot k \cdot x + b - k \cdot vc. \qquad (5.1)$$

Приравняв ее к нулю и решив уравнение, получаем следующее выражения:

- цена:

$$x = \frac{1}{2}\left(vc - \frac{b}{k}\right); \qquad (6)$$

- физический объем продаж:

$$y = \frac{1}{2}(k \cdot vc + b); \qquad (7)$$

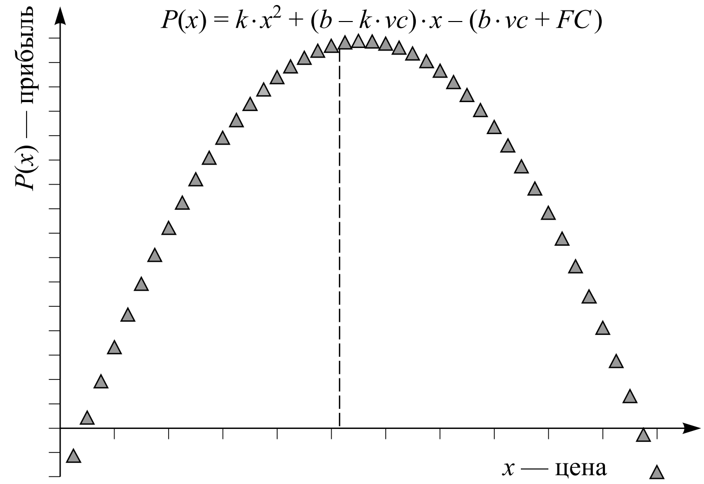

Рис. 4. Зависимость прибыли от цены

- себестоимость единицы товара:

$$z = vc + \frac{2 \cdot FC}{k \cdot vc + b}; \tag{8}$$

- выручка:

$$x \cdot y(x) = \frac{1}{4}\left(k \cdot vc^2 - \frac{b^2}{k}\right). \tag{9}$$

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, отметим, что при применении данного метода возможно возникновение ряда проблем.

Данная математическая модель справедлива при предположении, что сравниваемые между собой периоды времени представляют бесконечно малые временные промежутки ($\Delta t \rightarrow 0$). Поэтому нужно понимать, что предлагаемый метод в неявной форме исходит из сопоставимости цен и переменных затрат в сравниваемых отрезках времени. Следовательно, точность получаемых результатов зависит от темпов инфляции: чем выше темпы инфляции, тем ниже точность результата, и наоборот (абсолютно точный результат будет получен при условии, что инфляция отсутствует).

Далее, гипотеза о бесконечной малости промежутков сравниваемых между собой периодов времени ($\Delta t \rightarrow 0$) означает также, что рассматриваемый метод в неявной форме предполагает и неизменность постоянных затрат предприятия в сравниваемые периоды. Иначе говоря, при наличии скачкообразных изменений составляющих постоянных затрат в эти периоды степень точности модели также будет уменьшаться, что необходимо корректно учитывать.

В связи с необходимостью учета инфляционного фактора, а также возможного скачка постоянных затрат встает вопрос о том, каким образом можно уменьшить их влияние для повышения точности анализа. Один из применяемых автором способов заключается в следующем: год разбивается на два полугодия (именно поэтому в табл. 1 указаны периоды), каждое из которых становится базой для поиска значений постоянных и переменных затрат и точки безубыточности. Тем самым влияние темпа инфляции и возможного скачка постоянных затрат снижается как бы вдвое, что позволяет получить более точные результаты. В этом случае, к примеру, формула (2) выглядит следующим образом:

$$z(y) = vc + \frac{FC}{2 \cdot y(x)}, \tag{2.1}$$

где $y(x)$ — тоже физический объем продаж, но уже за полугодие.

Наконец, третья сложность, связанная с использованием предлагаемого метода, заключается в том, что он наиболее эффективен в случае монопродуктовых предприятий (выпускающих один вид продукта). Разумеется, подобное предприятие в чистом виде — абстракция, поэтому на практике можно «разделить» реальное многопродуктовое на несколько условных «однопродуктовых». В деле разделения на помощь приходит или бухгалтерский учет, который при всех своих недостатках все же вполне корректно определяет величину себестоимости, — если даже не каждого вида продукта (товара) в отдельности, то, по крайней мере, их агрегированных по какому-либо признаку групп, — или тот же управленческий учет, в котором себестоимость может быть вычислена и более точно.

Преимущество же данной модели заключается в том, что она позволяет обойтись минимумом данных (всего шесть величин), при этом на сегодняшний день их легко получить с помощью обычных бухгалтерских регистров: речь идет о выручке, себестоимости и физическом объеме проданных продуктов (товаров). Главное же достоинство предлагаемой модели состоит в том, что она позволяет, помимо установления величин переменных и постоянных затрат, еще найти и оптимальную, максимизирующую прибыль предприятия, цену товара, т. е. ответить на вопрос, который остается открытым для сегодняшних традиционных моделей *direct-costing* и *activity-based costing*. И, как показывает опыт автора, несмотря на перечисленные сложности, практическое применение разработанной модели по отношению к предприятиям различных отраслей оказывается достаточно плодотворным. Она позволяет наглядно демонстрировать руководителям предприятий скрытые (а порой уже упущенные) возможности оптимизации ценовой политики. Данный анализ представлен ниже на трех различных примерах: два первых являются точным воспроизведением построенной выше в виде выражений (1)–(9) модели, третий — ее адаптацией к одному, более сложному, частному случаю.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ

Пример 1. В табл. 2 приводятся показатели реализации товара, выпускаемого предприятием сферы материального производства за 2000–2001 гг.

Таблица 2

Основные показатели, характеризующие продажи первой фирмы за 2000–2001 гг.

№ стр.	Показатель	Годы	
		2000	**2001**
1	Выручка от продаж, тыс. руб.	358 945	484 535
2	Себестоимость продаж, тыс. руб.	147 844	210 909
3	Прибыль от продаж, тыс. руб. (стр. 1 – стр. 2)	211 101	273 626
4	Объем продаж, шт.	67 341	98 301
5	Средняя цена, тыс. руб./шт. (стр. 1/стр. 4)	5,33	4,93
6	Удельные себестоимость, тыс. руб./шт. (стр. 2/стр. 4)	2,20	2,15
7	Удельная прибыль, тыс. руб./шт. (стр. 5 – стр. 6)	3,13	2,78

Как видно из приведенных данных, в 2001 г. произошло снижение цены товара (с 5,33 до 4,93 тыс. руб. за единицу) при одновременном росте объема продаж (с 67 341 до 98 301 единицы), т. е. покупатели чутко отреагировали на изменение цены (рис. 5).

С помощью данных табл. 2 и выражения (1) составляется система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4{,}93 \cdot k + b = 98\,301 \\ 5{,}33 \cdot k + b = 67\,341, \end{cases}$$

решение которой дает искомую линейную зависимость (она изображена на рис. 1):

$$y(x) = -77\,400x + 479\,883. \tag{10}$$

Кроме того, в 2001 г. произошло также снижение себестоимости единицы товара (с 2,20 до 2,15 тыс. руб. за единицу) при одновременном росте объема продаж (с 67 341 до 98 301 единицы). Опять же с помощью данных табл. 2 и выражения (2) составляется еще одна система линейных уравнений:

$$\begin{cases} vc + \frac{FC}{98\,301} = 2{,}15 \\ vc + \frac{FC}{67\,341} = 2{,}20, \end{cases}$$

решение которой приводит к следующим результатам: постоянные затраты *FC* составляют 10 691 тыс. руб. и удельные переменные затраты *vc* — 2,04 тыс. руб. за единицу товара.

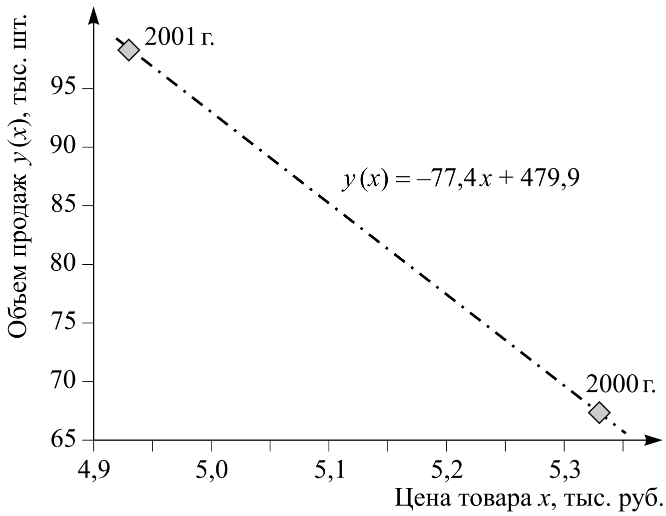

Рис. 5. Зависимость объема продаж товара от цены

Знание величин постоянных затрат *FC* и удельных переменных затрат *vc*, а также цены товара *x* позволяет с помощью выражения (3) установить интервал безубыточности:

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - vc} = \frac{FC}{\frac{y_{\min} - b}{k} - vc} = \frac{10\,691}{\frac{y_{\min} - 479\,883}{-77\,400} - 2{,}04}.$$

Решение квадратного уравнения дает две точки безубыточности для предприятия: 319 396 единиц при средней цене 2,07 тыс. руб. и 2591 единица при средней цене 6,17 тыс. руб. Очевидно, что на момент анализа более реальной была вторая величина, а следовательно, достигнутый в 2001 г. объем продаж (98 301 единица) в 38 раз превышает безубыточный объем продаж (2591 единица), т. е. имеет место колоссальная разница. Все это дает основание полагать, что фирма способна наращивать прибыль уже не только за счет повышения цен, а даже, наоборот, за счет их снижения, как это было показано в примере 1.

Далее составляется функция зависимости себестоимости единицы товара $z(y)$ от объема продаж $y(x)$ (рис. 6):

$$z(y) = vc + \frac{FC}{y(x)} = 2{,}04 + \frac{10\,691}{y(x)}. \tag{11}$$

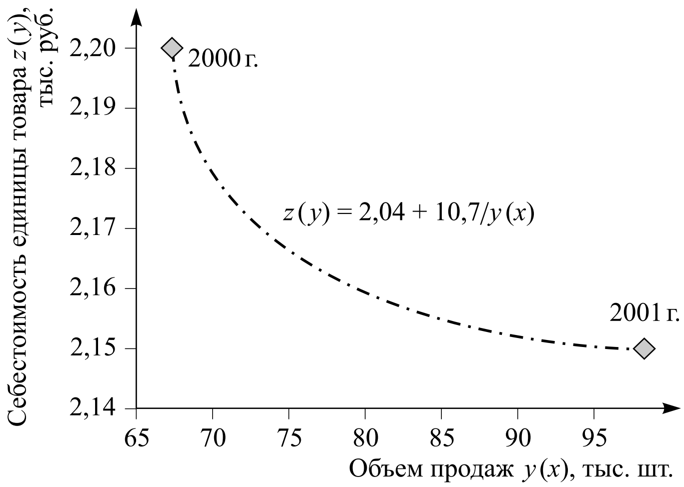

Рис. 6. Зависимость себестоимости единицы товара от объема его продаж

Если в выражение (11) подставить вместо $y(x)$ выражение (10), то складывается зависимость себестоимости единицы товара $z(x)$ от цены товара x (рис. 7):

$$z(x) = vc + \frac{FC}{k \cdot x + b} = 2{,}04 + \frac{10\,691}{-77\,400 \cdot x + 479\,883}. \qquad (12)$$

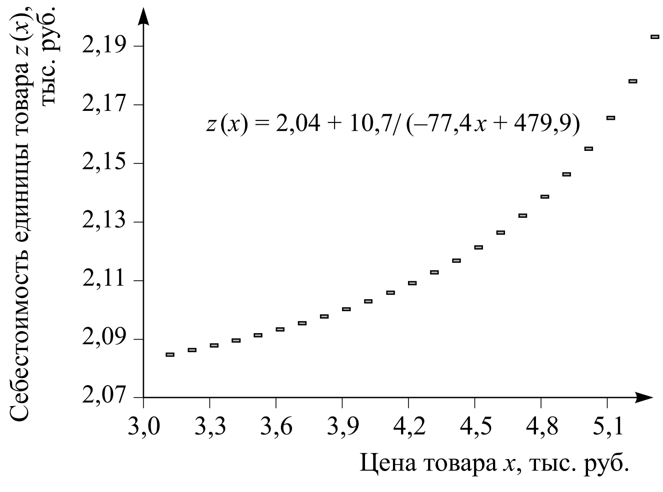

Рис. 7. Зависимость себестоимости единицы товара от цены

Далее, зная зависимость объема продаж $y(x)$ от цены товара x, а также себестоимости единицы товара $z(x)$ от цены x, можно вывести функцию зависимости прибыли $P(x)$ от цены товара x:

$$P(x) = y(x) \cdot [x - z(x)] = -77\,400 \cdot x^2 + 637\,779 \cdot x - 989\,652. \qquad (13)$$

Графическая интерпретация выражения (13), представленная на рис. 8, имеет отчетливо выраженный максимум, обозначающий, что есть некоторая цена, обеспечивающая максимум прибыли для предприятия на рынке продаваемых им товаров.

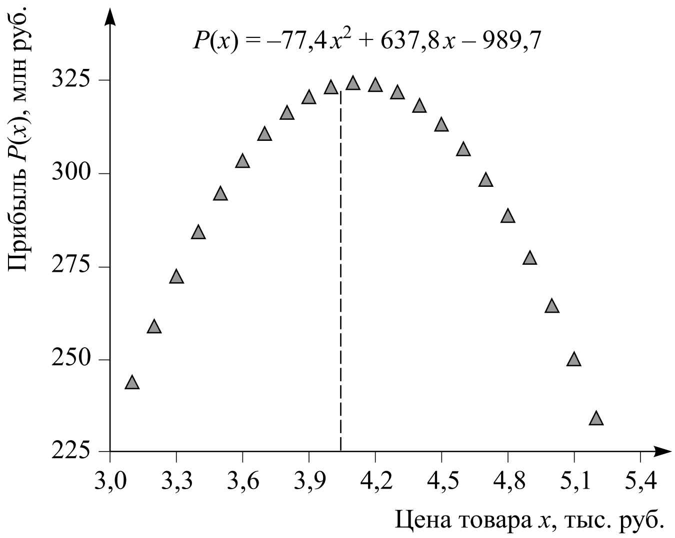

Рис. 8. Зависимость прибыли предприятия от цены

Для максимизации прибыли $P(x)$ находим первую производную выражения (13):

$$P'(x) = 2 \cdot k \cdot x + b - k \cdot vc = -154\,800 \cdot x + 637\,779.$$

Приравнивая ее к нулю и решая полученное уравнение, отыскиваем следующие значения цены, объема продаж, себестоимости и выручки, оптимальные с точки зрения прибыли предприятия (максимизирующие прибыль):

- цена единицы товара $x = 4{,}12$ тыс. руб., или 83,6% к уровню 2001 г.;
- объем продаж $y(x) = 160\,994$ шт., т. е. увеличившийся на 63,8% к уровню 2001 г.;
- себестоимость единицы товара $z(x) = 2{,}11$ тыс. руб., что означает 98,1% к 2001 г.;
- прибыль на единицу товара $x - z(x) = 2{,}01$ тыс. руб., или 72,3% к уровню 2001 г.;
- выручка от продаж $x \cdot y(x) = 663{,}30$ млн руб., т. е. рост на 36,9% к 2001 г.;

- прибыль $P(x) = y(x) \cdot [x - z(x)] = 323{,}60$ млн руб., что равносильно росту против прошлого года на 18,3%;
- наконец, рентабельность продаж $P(x)/(x \cdot y(x))$ составит 48,8% против 56,5% в 2001 г.

Если к сказанному добавить вывод о почти 40-кратном превышении достигнутого предприятием объема продаж по сравнению с точкой безубыточности, то ясно, что предприятие обладает значительным потенциалом роста прибыли, для реализации которого нужно всего лишь снизить цены по сравнению с 2001 г.

Пример 2. Рассмотренный в примере 1 случай влияния цены на объем продаж и издержки является очень показательным, однако пока еще не самым распространенным в жизни российских предприятий. Мало кто из них в настоящее время решается снижать цены, даже незначительно. Обычно такое снижение цен является не столько стратегическим шагом, продиктованным целенаправленно осуществляемой ценовой политикой, сколько вынужденной реакцией предприятия на собственное же предыдущее слишком резкое повышение цен, отпугнувшее покупателей (собственно говоря, именно это обстоятельство и явилось причиной снижения цен в случае из примера 1). Гораздо чаще на практике приходится сталкиваться с ситуацией, когда неосторожное повышение цен отпугивает покупателей и приводит к катастрофическому падению физического объема продаж (табл. 3).

Таблица 3

Основные показатели, характеризующие продажи второй фирмы за 2001–2002 гг.

№ стр.	Показатель	Годы	
		2001	**2002**
1	Выручка от продаж, руб.	45 426 662	42 143 858
2	Себестоимость продаж, руб.	43 595 214	39 366 852
3	Прибыль от продаж, руб. (стр. 1 – стр. 2)	1 831 448	2 777 006
4	Объем продаж, кг	8 447 751	7 471 472
5	Средняя цена, руб./кг (стр. 1/стр. 4)	5,38	5,64
6	Удельные себестоимость, руб./кг (стр. 2/стр. 4)	5,16	5,27
7	Удельная прибыль, руб./кг (стр. 5 – стр. 6)	0,22	0,37

Примечание: особенность товаров состоит в том, что они продаются на вес, т. е. в тоннах и килограммах, что позволяет рассматривать их как сравнительно однородную товарную массу.

Как видно из табл. 3, в 2002 г. произошел рост средней цены товаров по сравнению с предыдущим годом (с 5,38 до 5,64 руб. за 1 кг) при одновременном значительном сокращении объема продаж (с 8 447 751 до 7 471 472 кг), т. е. также явно проявились признаки того, что спрос покупателей зависит от цены (рис. 9).

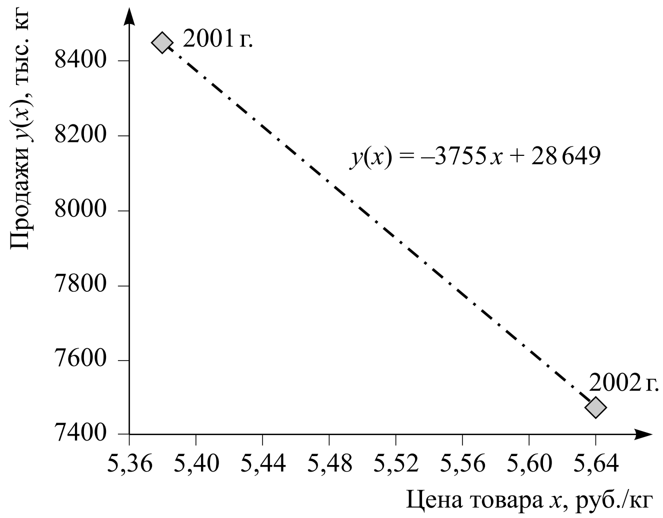

Рис. 9. Зависимость объема продаж товаров от их цены

Опять же предполагая, что зависимость объема продаж $y(x)$ от цены x подчиняется выражению (1), находим искомую линейную функцию (она также изображена на рис. 9):

$$y(x) = -3\,754\,919 \cdot x + 28\,649\,215. \tag{14}$$

Кроме того, из табл. 3 следует, что в 2002 г. снижение объема продаж сопровождалось ростом себестоимости каждого килограмма реализуемых товаров (с 5,09 до 5,18 руб.). В соответствии с выражением (2) можно составить еще одну систему уравнений:

$$\begin{cases} vc + \frac{FC}{8\,447\,751} = 5{,}16 \\ vc + \frac{FC}{7\,471\,472} = 5{,}27, \end{cases}$$

благодаря чему определяются величины постоянных и удельных переменных затрат: $FC = 7\,111\,579$ руб. и $vc = 4{,}32$ руб./кг товаров.

Зная величины постоянных затрат FC и удельных переменных затрат vc, а также зависимости объема продаж от цены товара x, возможно установвить *интервал безубыточности*. Для условий 2001–2002 гг. минимальный объем продаж y_{min}, при котором прибыль фирмы была бы равна нулю, находится из уравнения:

$$y_{\min} = \frac{FC}{x - vc} = \frac{FC}{\frac{y_{\min} - b}{k} - vc} = \frac{7\,111\,579}{\frac{y_{\min} - 28\,649\,215}{-3\,754\,919} - 4{,}32}.$$

Решение квадратного уравнения относительно y_{min} дает следующие две точки безубыточности: 9 665 095 кг при средней цене 5,06 руб. за 1 кг товаров и 2 762 870 кг при средней цене 6,89 руб. за 1 кг товаров (забегая вперед, отметим, что эти точки хорошо видны на рис. 12). Очевидно, что в настоящий момент предприятие находится примерно посередине между двумя точками безубыточности, все еще имея солидный резерв даже на фоне снижения в 2002 г. спроса на 13% (по сравнению с 2001 г.) в результате увеличения цен.

Как обычно, выводим функции зависимости себестоимости 1 кг товаров $z(y)$ от объема продаж $y(x)$ и от цены товаров x (данные функции изображены на рис. 10, 11):

$$z(y) = vc + \frac{FC}{y(x)} = 4{,}32 + \frac{7\,111\,579}{y(x)}, \tag{15}$$

$$z(x) = 4{,}32 + \frac{7\,111\,579}{-3\,754\,919 \cdot x + 28\,649\,215}. \tag{16}$$

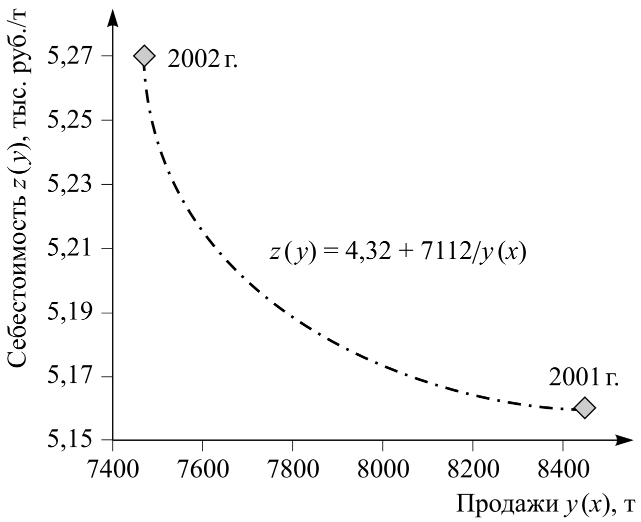

Рис. 10. Зависимость себестоимости 1 т товаров от объема продаж

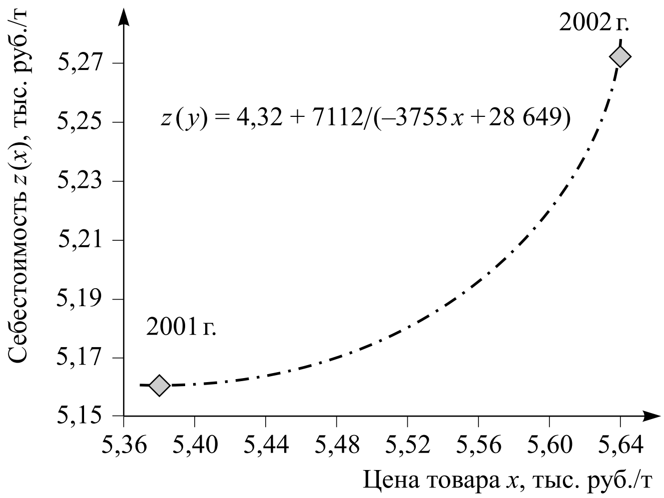

Рис. 11. Зависимость себестоимости 1 т товаров от цены

Получив зависимость объема продаж $y(x)$ от цены товаров x, а также зная зависимость себестоимости 1 кг товаров $z(x)$ от их цены x, находим функцию зависимости прибыли $P(x)$ от цены товаров x:

$$P(x) = y(x) \cdot [x - z(x)] = -3\,754\,919 \cdot x^2 + 44\,870\,465 \cdot x - 130\,876\,188. \quad (17)$$

Графическая интерпретация выражения (17), представленная на рис. 12, как и в первом примере, имеет отчетливо выраженный максимум, означающий, что есть некоторая цена, обеспечивающая максимум прибыли от реализации товаров.

В итоге, дифференцируя выражение (17) и решая полученное уравнение, отыскиваем следующие значения цены x, себестоимости $z(x)$ и объема продаж $y(x)$, обеспечивающие максимум прибыли $P(x)$ от реализации товаров:

- цена 1 кг товаров $x = 5{,}97$ руб., или 105,9% к 2002 г.;
- объем продаж $y(x) = 6\,232\,349$ кг, т. е. всего лишь 83,4% к уровню 2002 г.;
- себестоимость 1 кг товаров $z(x) = 5{,}46$ руб., или 103,6% к уровню 2002 г.;
- прибыль на 1 кг товаров $x - z(x) = 0{,}51$ руб., или 137,8% к уровню 2002 г.;
- выручка от продаж $x \cdot y(x) = 37\,207\,124$ руб., сократившаяся на 11,7% по сравнению с 2002 г.;
- прибыль составит $P(x) = 3\,178\,498$ руб., т. е. налицо рост на 14,5% против 2002 г.

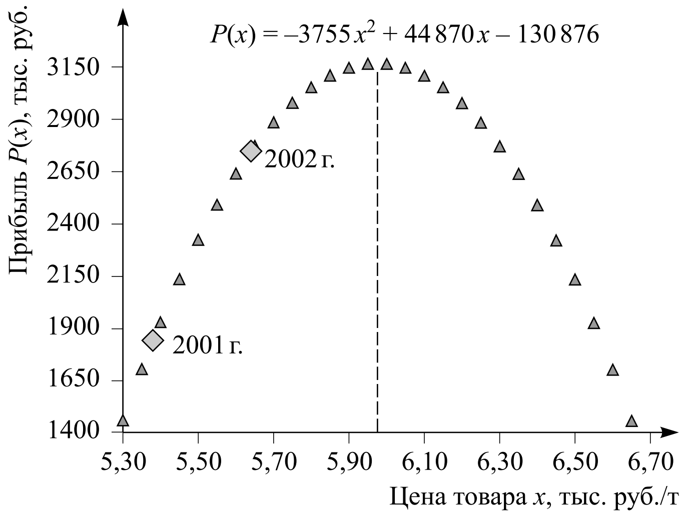

Рис. 12. Зависимость прибыли от цены

П р и м е ч а н и е: точка максимума маркирована вертикальной пунктирной линией, для сравнения маркерами показаны фактические уровни цен и прибыли в 2001–2002 гг.

Общий вывод не является позитивным, поскольку интересы организации и покупателей противоречат друг другу. При росте цен растет прибыль организации, но падает спрос, т. е. страдает покупатель; при снижении же цен спрос растет и покупатель выигрывает, но снижается прибыль организации. Коллизию интересов продавца и покупателя нужно понимать в том смысле, что проводившаяся организацией в 2001–2002 гг. ценовая политика не учитывала платежеспособный спрос и нуждается в корректировке.

Пример 3. Здесь рассматривается ситуация, с которой приходится сталкиваться чаще всего. Она тоже поддается исследованию посредством предлагаемой в статье модели, однако содержательная интерпретация решения является более замысловатой, в связи с чем этот случай, мы предлагаем вниманию читателей последним.

Данные табл. 4 не демонстрируют такого явного свойства эластичного рынка, как снижение продаж при увеличении цены (что имело место в примере 2): объем продаж растет все три года (с 754 до 899 тыс. кг), несмотря на заметный рост цены (с 13,39 до 17,85 руб.). Не заметно и тех признаков, которые могли бы проявиться, если бы затраты на единицу выпускаемой продукции формировались как функция переменных и постоянных затрат: при росте объема продаж себестоимость единицы товара должна снижаться, тогда как в табл. 4, наоборот, она растет (с 10,14 до 13,75 руб. за 1 кг).

Таблица 4

Основные показатели, характеризующие продажи третьей фирмы за 1999–2001 гг.

№ стр.	Показатель	Годы		
		1999	**2000**	**2001**
1	Выручка от продаж, руб.	10 095	13 073	16 043
2	Себестоимость продаж, руб.	7643	9636	12 357
3	Прибыль от продаж, руб. (стр. 1 – стр. 2)	2452	3437	3686
4	Объем продаж, кг	754	863	899
5	Средняя цена, руб./кг (стр. 1/стр. 4)	13,39	15,15	17,85
6	Удельные себестоимость, руб./кг (стр. 2/стр. 4)	10,14	11,17	13,75
7	Удельная прибыль, руб./кг (стр. 5 – стр. 6)	3,25	3,98	4,10

П р и м е ч а н и е: как и в табл. 3, особенностью товаров здесь является то, что, несмотря на различия ассортиментного характера, они сопоставимы по массе; это позволяет рассматривать их как один или, по крайней мере, как однородный товар.

Тем не менее ситуация не является безысходной. Заметный излом на рис. 13 подсказывает, что покупатель «устал» гнаться за ростом цены и для предприятия это обернулось меньшим приростом объема продаж, нежели в предыдущем году. Иными словами, влияние цен на покупательский спрос в действительности существует, только проявляется это косвенно, в замедлении роста объема продаж.

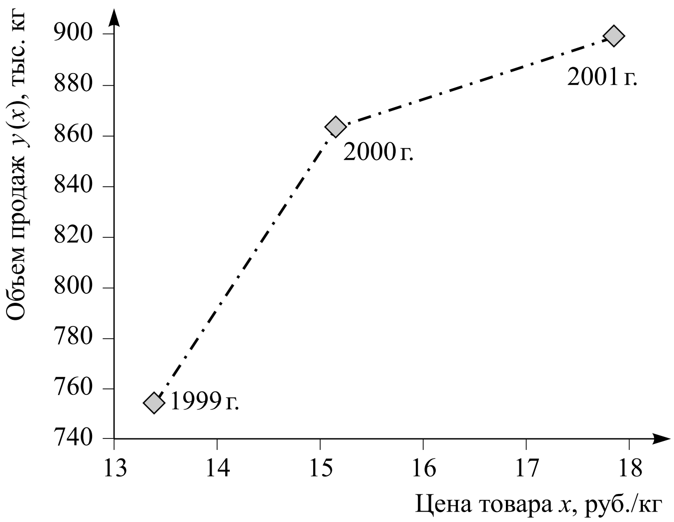

Рис. 13. Зависимость объема продаж товара от цены

В то же время рис. 14 показывает, что меньший прирост объема продаж в 2001 г. по сравнению с предыдущим годом обусловил значительно больший прирост себестоимости 1 кг товара, что можно объяснить также влиянием спроса, только проявившимся косвенно, в неявной форме. Принимая во внимание данное обстоятельство, появляется возможность выполнить анализ цен, объемов продаж и затрат, опираясь на функции, связывающие между собой уже не эти показатели непосредственно, а показатели их *изменения* во времени. С этой целью на основе табл. 4 строится вспомогательная таблица, касающаяся *изменений* объема продаж, цены и себестоимости единицы товара (табл. 5, рис. 15, 16).

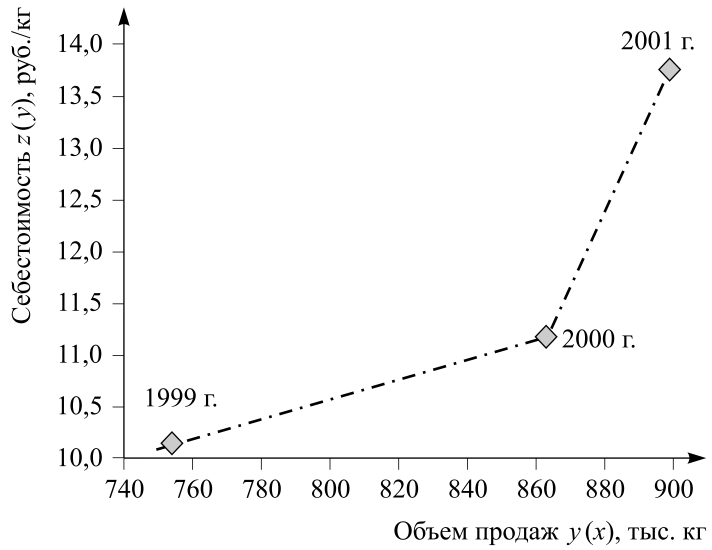

Рис. 14. Зависимость себестоимости 1 кг товара от объема продаж

Таблица 5

Изменение объема продаж, цены и себестоимости третьей фирмы

	Изменение объема продаж $\Delta y(\Delta x)$, тыс. кг	**Изменение цены за 1 кг Δx, руб.**	**Изменение себестоимости 1 кг товара $\Delta z(\Delta x)$, руб.**
2000 г. в сравнении с 1999 г.	109	1,76	1,03
2001 г. в сравнении с 2000 г.	36	2,70	2,58

Исходя из наличия линейной зависимости между изменением объема продаж $\Delta y(\Delta x)$ и изменением цены Δx, можно составить уравнение:

$$\Delta y(\Delta x) = k \cdot \Delta x + b, \tag{18}$$

где $\Delta y(\Delta x)$ — изменение объема продаж товара (тыс. кг); Δx — изменение цены товара (руб.); k и b — коэффициенты, значения которых требуется установить.

С помощью табл. 5 составляется система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}76 \cdot k + b = 109 \\ 2{,}70 \cdot k + b = 36, \end{cases}$$

решение которой дает нужную зависимость (она показана на рис. 15 в виде линии):

$$\Delta y(\Delta x) = -78 \cdot \Delta x + 246\,. \tag{19}$$

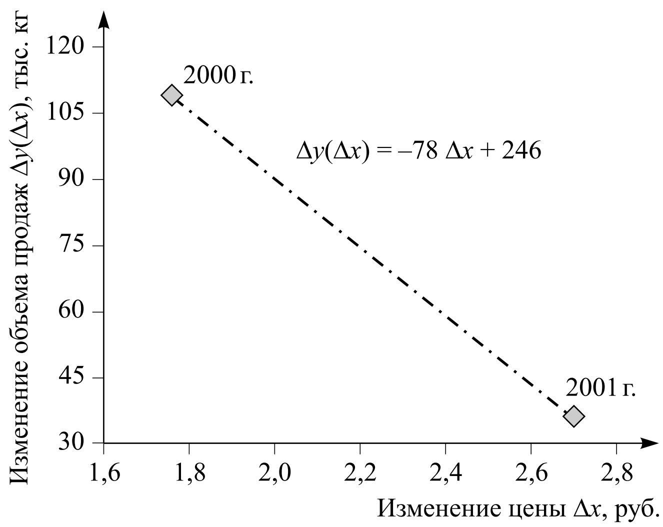

Рис. 15. Зависимость изменения объема продаж от изменения цены

Применение преобразований $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ (где x_0 — базовая цена товара, подразумевающая цену последнего отчетного периода, т. е. за 2001 г. (согласно данным табл. 4, она равна 17,85 руб. (стр. 5, правый стб.)); y_0 — базовый физический объем продаж, также за 2001 г., равный 899 тыс. кг (табл. 4, стр. 4, правый стб.)) позволяет осуществить переход от функции $\Delta y(\Delta x)$ к более удобной для анализа функции $y(x)$, т. е. к зависимости объема продаж непосредственно от цены товара x (рис. 16):

$$y(x) = -78 \cdot x + 2537. \tag{20}$$

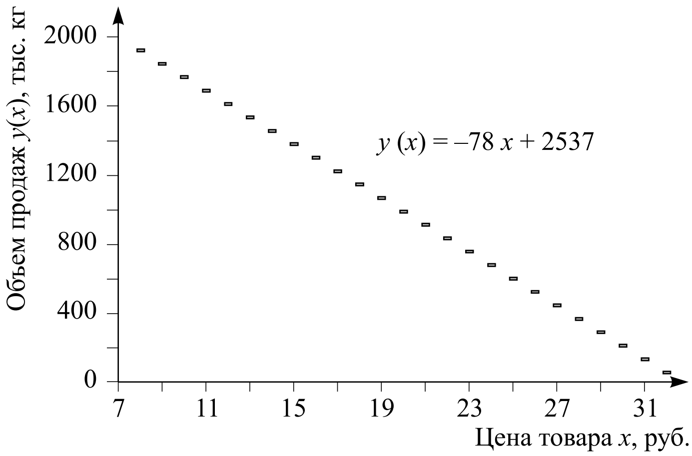

Рис. 16. Зависимость объема продаж товара от его цены

Вместо линейной функции, представленной выражением (20), зависимость объема продаж $y(x)$ от цены x можно было бы значительно более точно аппроксимировать квадратным уравнением следующего вида [Четыркин, 1977; 1995]:

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c — коэффициенты уравнения, значения которых требуется установить.

В этом случае с помощью табл. 4 составляется система линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 13{,}39^2 \cdot a + 13{,}39 \cdot b + c = 754 \\ 15{,}15^2 \cdot a + 15{,}15 \cdot b + c = 863 \\ 17{,}85^2 \cdot a + 17{,}85 \cdot b + c = 899, \end{cases}$$

решение которой дает искомую функцию зависимости объема продаж $y(x)$ от цены x:

$$y(x) = -12x^2 + 411x - 2595.$$

Полученное выражение имеет максимум при цене 17 руб. за 1 кг и обеспечивает объем продаж 924 тыс. кг. Если сравнить эти показатели с достигнутыми в 2001 г., то выясняется, что оптимальный с точки зрения реального объема продаж уровень цены уже пройден: в 2001 г. цена была почти 18 руб., при этом объем продаж составил 899 тыс. кг.

Но есть ли преимущество найденной функции второй степени перед линейной функцией (20)? Если подходить к задаче исследования влияния спроса покупателей на объем продаж чисто математически, то, вероятно, есть. Однако, при учете содержательного аспекта интерпретации получаемых решений, те общие выводы, которые следуют из простых линейных моделей, более важны, поскольку позволяют не потерять видение и понимание ситуации в целом. Именно поэтому, на наш взгляд, лучше отдать предпочтение простым линейным конструкциям, пожертвовав малополезной с точки зрения реальной экономической ситуации избыточной математической точностью квадратных или иных зависимостей.

Аналогичным образом — через линейную функцию — отыскивается зависимость изменения себестоимости $\Delta z(\Delta x)$ от изменения цены Δx:

$$\Delta z(\Delta x) = k \cdot (\Delta x) + b, \qquad (21)$$

где $\Delta z(\Delta x)$ — изменение себестоимости единицы товара (руб.); Δx — изменение цены товара (руб.); k и b — коэффициенты уравнения, значения которых требуется установить.

На основе данных табл. 5 составляется очередная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}76 \cdot k + b = 1{,}03 \\ 2{,}70 \cdot k + b = 2{,}58, \end{cases}$$

решение которой имеет следующий вид (рис. 17):

$$\Delta z(\Delta x) = 1{,}65 \cdot \Delta x - 1{,}87. \qquad (22)$$

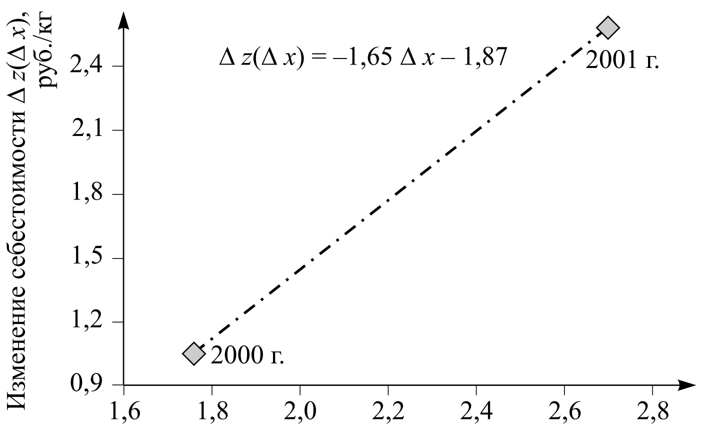

Рис. 17. Зависимость изменения себестоимости 1 кг товара от изменения цены

Преобразования вида $x = x_0 + \Delta x$, $z = z_0 + \Delta z$ (где z_0 — базовая себестоимость единицы товара (в рассматриваемой ситуации за 2001 г.), равная 13,75 руб. (табл. 4, стр. 6)) позволяют перейти от функции $\Delta z(\Delta x)$ к более удобной для анализа теоретической функции $z(x)$, т. е. к зависимости себестоимости непосредственно от цены товара x (рис. 18):

$$z(x) = 1,65 \cdot x - 17,57. \quad (23)$$

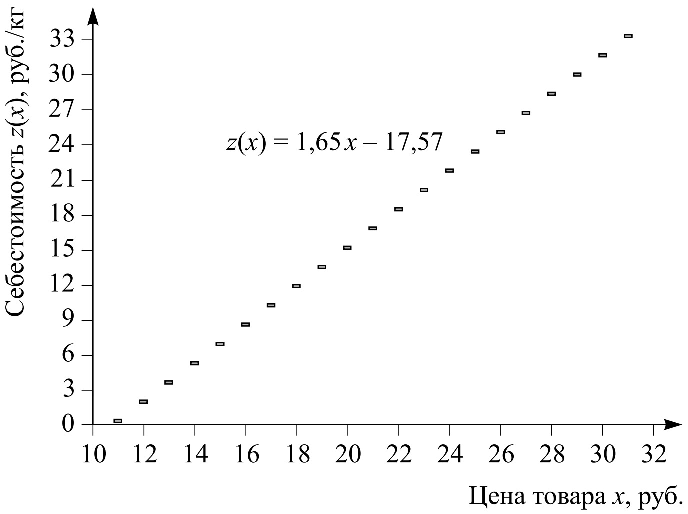

Рис. 18. Зависимость себестоимости 1 кг товара от его цены

Если цена товара x будет меньше 10,65 руб., то из выражения (23) следует… отрицательное значение себестоимости (что хорошо видно на рис. 18). Дело в том, что в примере 3 в составе затрат не была выделена такая составляющая, как постоянные затраты *FC*, и соответственно, это привело к столь странному результату. Если бы было возможно учесть в составе себестоимости товара наличие постоянных затрат, то график на рис. 18 выглядел бы аналогично рис. 3, 7 и 11, т. е. по мере уменьшения цены x он асимптотически приближался бы к величине удельных переменных затрат *vc*; сейчас этого не происходит. Поэтому, говоря об использовании функций $\Delta z(\Delta x)$ и $z(x)$ для каких-либо расчетов, нужно иметь в виду, что это справедливо лишь по отношению к тому интервалу изменению цены Δx, который имел место в 1999–2001 гг. (табл. 5), т. е. от 1,7 до 2,8 руб.

Поскольку в рамках примера 3 затраты не удается разложить на постоянные и переменные, постольку в силу этого невозможно представить зависимость себестоимости единицы товара от объема продаж как гиперболическую. Если выражение (23) преобразовать с помощью функционала (20), подставив вместо x выражение для $y(x)$, то получается только линейная зависимость: $z(y) = -0{,}021y(x) + 36{,}01$. Но, правда, как положительный момент можно отметить то обстоятельство, что она имеет знак минус перед объемом продаж, который показывает, что при росте объема продаж себестоимость единицы товара будет обязательно снижаться.

На очереди определение зависимости прибыли $P(\Delta x)$ от изменения цены Δx товара и установление того, при каком значении аргумента эта функция имеет максимум.

Данная зависимость, получаемая на основе выражений (19) и (22), будет выглядеть следующим образом (рис. 19):

$$\begin{aligned} P(\Delta x) &= \left[y_0 + \Delta y(\Delta x)\right] \cdot \left[(x_0 + \Delta x) - \left(z_0 + \Delta z(\Delta x)\right)\right] = \\ &= 51 \cdot (\Delta x)^2 - 1210 \cdot \Delta x + 6836, \end{aligned} \tag{24}$$

где $P(\Delta x)$ — прибыль от продажи товаров (в тыс. руб.).

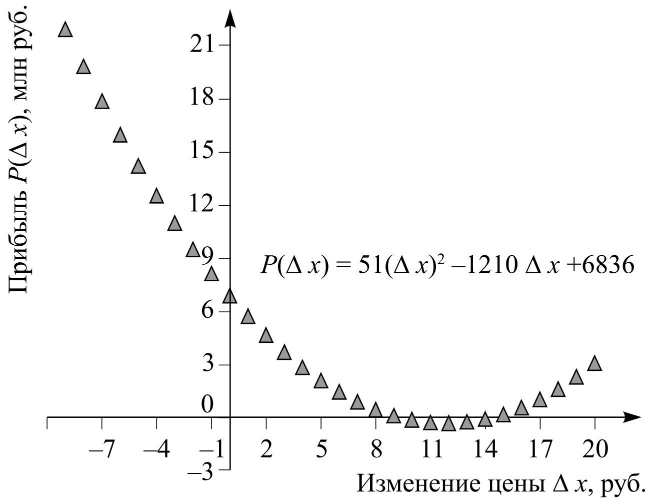

Рис. 19. Зависимость прибыли от изменения цены товара

Преобразование $x = x_0 + \Delta x$ позволяет перейти от функции $P(\Delta x)$ к функции $P(x)$, т. е. уже к зависимости прибыли непосредственно от цены товара x (рис. 20):

$$P(x) = 51x^2 - 3046x + 45140. \tag{25}$$

Для максимизации прибыли $P(\Delta x)$ или же $P(x)$, как и в примерах 1–2, необходимо найти точки экстремума данных функций. Но специфика примера 3 состоит в том, что выражения (24) и (25) представляют собой уравнения парабол с положительным значением постоянного коэффициента при переменной во второй степени (+51), т. е. парабол, экстремумами которых являются точки минимума (рис. 19–20). Значит, ответ на вопрос о том, при каком изменении цены Δx или же при какой цене x прибыль $P(x)$ будет максимальна, получить не удастся. Вместо этого можно лишь узнать, при каком изменении цены Δx или, соответственно, при какой цене x будет получен максимальный убыток, что интересует предпринимателя меньше всего.

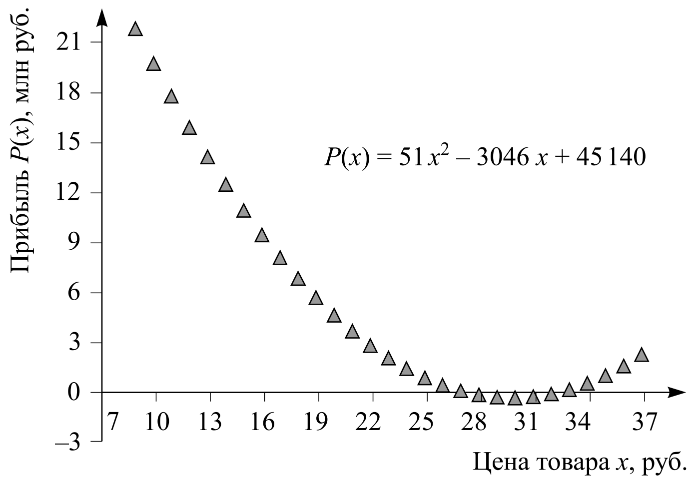

Рис. 20. Зависимость прибыли от цены товара

При анализе рис. 20 у читателя может возникнуть ироничный вопрос: «А как же быть с огромной положительной прибылью, которая, согласно графику на рис. 20 и функции тренда на нем, имеет место быть даже при нулевой цене на товар?» Такая странная ситуация возникает вследствие того, что была использована, как отмечалось, *линейная*, а не *гиперболическая*, аппроксимация тренда затрат (т. е. не принималось в расчет наличие постоянных затрат FC). В результате это становится причиной возникновения отрицательных значений себестоимости, а также положительной прибыли при нулевой цене. Следовательно, говоря об использовании функций $P(\Delta x)$ и $P(x)$ для каких-либо прогнозов, равно как и функций $\Delta z(x)$ и $z(x)$, вновь нужно иметь в виду, что эти прогнозы будут справедливы лишь по отношению к тем интервалам изменения цены Δx, которые имели место в 1999–2001 гг. (табл. 4, 5). При выходе изменения цены Δx за рамки этих интервалов, где были получены функционалы (24) и (25), изображенные на рис. 19, 20 — при выходе как вниз, так и вверх, полученные зависимости становятся непригодными для анализа и прогнозирования.

Итак, какой же вывод следует из примера 3? В отличие от двух первых примеров, где сразу был получен ценовой ориентир, обеспечивающий максимум прибыли, здесь приходится довольствоваться информацией о том, что чем меньше вырастет цена x (а лучше, если она даже несколько снизится), тем:

- больше будет объем продаж $y(x)$, о чем говорят выражения (19)–(20) и рис. 15–16;
- меньше окажется себестоимость единицы товара $z(x)$, что следует из уравнений (22)–(23) и рис. 17–18;
- соответственно, выше будет прибыль предприятия $P(x)$, как показывают формулы (24)–(25) и рис. 19–20.

Но достаточно ли таких расплывчатых рекомендаций для проведения ценовой политики предприятия?

Разумеется. Ведь если руководству предприятия хватит смелости действительно попробовать увеличить прибыль предприятия *не числом* (за счет повышения цен), *а умением* (за счет пусть незначительного, но все же снижения этих цен), то результаты не заставят себя долго ждать. Благодарный рынок тут же продемонстрирует такое свое качество, как эластичность спроса. Даже на символическое снижение цены потребитель ответит незамедлительным ростом спроса, обеспечивающим для предприятия рост объема продаж, что, в свою очередь, обусловит остальные позитивные для предприятия финансовые последствия, в том числе снижение себестоимости единицы товара и рост прибыли, т. е. повышение эффективности производства в целом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные примеры, несмотря на всю свою, казалось бы, условность и малозначительность (три предприятия — это действительно не так много), тем не менее являются показательными. Во-первых, для анализа были выбраны вовсе не рядовые предприятия, а юридические лица, находящиеся под бдительным надзором Антимонопольного комитета. Во-вторых, товары, о которых идет речь в примерах, особо важны для любой страны, а для России и вовсе бесценны в силу некоторых особенностей ее исторического развития и географического положения. В-третьих, ситуация, описанная в примерах 2, 3, характерна для десятков предприятий, принадлежащих различным отраслям, а отсюда нетрудно сделать заключение о ее массовости. И соответственно, вывод, к которому нас приводит пример 1, сводится к тому, что если даже несколько десятков крупных и средних предприятий в разных отраслях продемонстрируют снижение цен, преследуя при этом сугубо меркантильную цель — увеличить продажи и свою прибыль, — то эффект будет аналогичен тому, который мы наблюдаем, бросая камень в воду: камень падает в одну точку, а волны разбегаются по всей глади пруда. Иначе говоря, могут действительно возникнуть предпосылки для дефляции, о которой уже несколько лет говорит правительство и в которой остро нуждается деформированная инфляцией последнего десятилетия экономика.

Литература

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984.

Ланге О., Банасиньский А. Теория статистики. М.: Статистика, 1971.

Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. М.: Финансы и статистика, 1982.

Стоянова Е. С. Финансовый менеджмент: теория и практика. М.: Перспектива, 2000.

Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. М.: Статистика, 1977.

Четыркин Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело ЛТД, 1995.

Статья поступила в редакцию 1 июля 2004 г.